アジアン・オプションのオプションプライシング
– アメリカンタイプとゲームタイプへの応用 –

M2004MM013 石原 正也
指導教員　國田 寛

1　はじめに

アジアン・オプション [2] は，事前に決められたある期間中の資産の平均価格に依存するオプションである．このオプションは，投資者が原資産価格の不利な動きから生ずる損失を，連続的にヘッジを繰り返すことなく，リスクを回避するために用いられる．

アジアン・オプションをアメリカン・オプションタイプ [3] に拡張することで満期以前の任意の時点での行使が可能となり，自由境界値問題として解釈できるため数学的に面白いといえる．また，ゲーム・オプションタイプ [1] に拡張することによりアメリカンタイプの事前行使に加え，オプションの売り手にもオプションをストップできるようなり，売り手側の自由境界も存在すると考えられる．これらがバニラタイプのオプションと比べて自由境界がどのようになるか興味があった．

本研究ではヨーロピアンタイプのアジアン・オプションをはじめ，アメリカンタイプやゲームタイプへのアジアン・オプションの拡張を行う．

2　アメリカン・アジアン・オプション

幾何平均を使ったアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションを考える．t を現在時刻，T を満期とする．アメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの終端条件は

$$C(S,G,T)=\max(S_T-G_T,0) \tag{1}$$

で与えられ，S_T と G_T はそれぞれ時刻 T での資産価格と資産価格の幾何平均値とする．また，G_t は

$$G_t=\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u du\right),\quad 0<t\le T \tag{2}$$

で定義される．S_t はリスク中立対数正規過程

$$dS_t=(r-q)S_t dt+\sigma S_t dZ_t \tag{3}$$

にしたがうとする．r は無リスク金利，q は配当利回り，σ はボラティリティ，そして Z_t は標準ウィナー過程とする．確率微分方程式 (3) を解き，式 (2) を使えば

$$\ln S_T=\ln S_t+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma[Z_T-Z_t]$$

$$\begin{aligned}\ln G_T=&\frac{t}{T}\ln G_t+\frac{\sigma}{T}\int_t^T[Z_u-Z_t]du\\&+\frac{1}{T}\left[(T-t)\ln S_t+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{(T-t)^2}{2}\right]\end{aligned}$$

を得る．

2.1　PDE アプローチ

ヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格に関する偏微分方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t}+\left(\frac{G}{t}\ln\frac{S}{G}\right)\frac{\partial c}{\partial G}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\\&\qquad+(r-q)S\frac{\partial c}{\partial S}-rc=0,\quad 0<t<T\end{aligned} \tag{4}$$

により与えられ，終端条件は

$$c(S,G,T)=\max(S_T-G_T,0)$$

とする．

$S^*(G,t)$ をアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの最適行使境界とする．アメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格に関する偏微分方程式は式 (4) を修正することにより

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C}{\partial t}+\left(\frac{G}{t}\ln\frac{S}{G}\right)\frac{\partial C}{\partial G}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial C}{\partial S}-rC\\&\quad=\begin{cases}0 & \text{if}\quad S\le S^*(G,t)\\ -qS-\frac{dG}{dt}+rG & \text{if}\quad S>S^*(G,t)\end{cases}\end{aligned} \tag{5}$$

を得る．

変数を

$$y=t\ln\frac{G}{S},\quad W(y,t)=\frac{C(S,G,t)}{S} \tag{6}$$

とおく．式 (6) を使えば，偏微分方程式 (5) と終端条件 (1) は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\sigma^2t^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\frac{\partial W}{\partial y}-qW\\&\quad=\begin{cases}0 & \text{if}\quad y\ge y^*(t)\\ -q+re^{y/t}+\frac{y}{t^2}e^{y/t} & \text{if}\quad y<y^*(t)\end{cases}\end{aligned} \tag{7}$$

$$W(y,T)=\max(1-e^{y/T},0) \tag{8}$$

のように変数を減少させることができる．行使（停止）領域でのアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格は

$$W(y,t)=1-e^{y/t},\quad y\le y^*(t)$$

で与えられる．

2.2 早期行使プレミアム

上記の価格付けモデルにおける解は，偏微分方程式のグリーン関数を含んだ積分で表現できる．偏微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) t \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

のグリーン関数を $F(y,t;Y,T)$ とおくと

$$F(y,t;Y,T) = \mathbf{n}\left(\frac{Y - y + \mu\int_t^T u du}{\sigma\sqrt{\int_t^T u^2 du}}\right)$$

であることがわかる．ここで，$\mu = r - q + \frac{\sigma^2}{2}$ とおき，$\mathbf{n}(\cdot)$ は標準正規密度関数とする．式 (7)，(8) の解は

$$\begin{aligned} W(y,t) &= e^{-q(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\max(1 - e^{Y/T}, 0)F(y,t;Y,T)dY \\ &\quad + \int_t^T e^{-q(u-t)}\int_{-\infty}^{y^*(u)}\left(q - re^{Y/u} - \frac{Y}{u^2}e^{Y/u}\right) \\ &\quad \times F(y,t;Y,u)dYdu \end{aligned} \tag{9}$$

と表現することができる．$y^*(u)$ は時刻 u での y の最適行使境界である．式 (9) の最初の項に S を掛けた場合，ヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格である．積分を計算することにより，ヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格は

$$\begin{aligned} c(S,G,t) &= Se^{-q(T-t)}\mathbf{N}(d_1) \\ &\quad - G^{t/T}S^{(T-t)/T}e^{-q(T-t)}e^{-Q}\mathbf{N}(d_2) \end{aligned} \tag{10}$$

$$d_1 = \frac{t\ln\frac{S}{G} + \frac{\mu}{2}(T^2 - t^2)}{\sigma\sqrt{\frac{T^3 - t^3}{3}}}, \quad d_2 = d_1 - \frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{T^3 - t^3}{3}}$$

$$Q = \frac{\mu(T^2 - t^2)}{2T} - \frac{\sigma^2(T^3 - t^3)}{6T^2}$$

であることがわかる．ここで，$\mathbf{N}(\cdot)$ は標準正規分布関数とする．$c(S,G,t)$ は式 (10) で与えられ，$C(S,G,t)$ は式 (5) の解とすれば，早期行使プレミアムの積分表現は

$$\begin{aligned} & C(S,G,t) - c(S,G,t) \\ &= S\int_t^T \Bigg\{ qe^{-q(u-t)}\mathbf{N}(\hat{d}_1) - \left(\frac{G}{S}\right)^{t/u} e^{-q(u-t)}e^{\hat{Q}} \\ &\quad \times \left[\left(r + \hat{d}_3\right)\mathbf{N}(\hat{d}_2) - \frac{\hat{\sigma}}{u^2}\mathbf{n}\left(\hat{d}_2\right)\right]\Bigg\} du \end{aligned}$$

$$\hat{d}_1 = \frac{u\ln\frac{G}{S^*(G,u)} - t\ln\frac{G}{S} + \frac{\mu}{2}(u^2 - t^2)}{\hat{\sigma}}$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \frac{\hat{\sigma}}{u}, \quad \hat{d}_3 = \frac{t\ln\frac{G}{S} - \frac{\mu}{2}(u^2 - t^2) + \frac{\hat{\sigma}^2}{u}}{u^2}$$

$$\hat{Q} = \frac{\hat{\sigma}^2}{2u^2} - \frac{\mu(u^2 - t^2)}{2u}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{3}(u^3 - t^3)$$

となる．

3 ゲーム・アジアン・オプション

3.1 オプション価格

現在時刻 t，満期 T，無リスク金利 r，配当利回り q，ボラティリティ κ のとき，S_t はリスク中立確率 P^0 のもとで資産価格過程

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \kappa S_t dZ_t^0 \tag{11}$$

にしたがうとする．ただし，Z_t^0 は P^0 に関して標準ブラウン運動とする．式 (11) の解は

$$S_t = S_0\exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa Z_t^0\right)$$

と表される．ここで，ペイオフ関数を

$$\begin{aligned} &\text{売り手 A} \quad : \quad f_\delta(S,G) = f(S,G) + \delta(S,G) \\ &\text{買い手 B} \quad : \quad f(S,G) \end{aligned}$$

と定義する．$\delta(S,G)(\geq 0)$ はペナルティとする．また，G_t は式 (2) で与える．特に，コール・オプションのとき

$$\begin{aligned} f(S,G) &= \max(S - G, 0) \\ \delta(S,G) &= \delta S \end{aligned}$$

プット・オプションのとき

$$\begin{aligned} f(S,G) &= \max(G - S, 0) \\ \delta(S,G) &= \delta S \end{aligned}$$

とする．また，オプション価格を

$$\begin{aligned} & V(S,G,t) \\ &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\mathbb{E}^0\Big[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}\{f(S_\tau,G_\tau)1_{\tau\leq\sigma} \\ &\quad + f_\delta(S_\sigma,G_\sigma)1_{\sigma<\tau}\}\Big| S_t = S, G_t = G\Big] \end{aligned}$$

によって定義する．ただし，$\mathcal{T}_{t,T}$ は区間 $[t,T]$ の値をとる停止時刻の全体である．このとき

$$f(S,G) \leq V(S,G,t) \leq f_\delta(S,G)$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^A &= \{(S,G,t); V(S,G,t) = f_\delta(S,G)\} \\ \mathcal{E}^B &= \{(S,G,t); V(S,G,t) = f(S,G)\} \\ \mathcal{C} &= \{(S,G,t); f(S,G) < V(S,G,t) < f_\delta(S,G)\} \end{aligned}$$

とおき，

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \inf\left\{\tau \geq t; (S_\tau, G_\tau, \tau) \in \mathcal{E}^A\right\} \\ \tau^0 &= \inf\left\{\tau \geq t; (S_\tau, G_\tau, \tau) \in \mathcal{E}^B\right\} \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} V(S,G,t) &= \mathbb{E}^0\Big[e^{-r(\sigma^0\wedge\tau^0-t)}\{f(S_{\tau^0},G_{\tau^0})1_{\tau^0\leq\sigma^0} \\ &\quad + f_\delta(S_{\sigma^0},G_{\sigma^0})1_{\sigma^0<\tau^0}\}\Big| S_t = S, G_t = G\Big] \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$\mathcal{C}$ 上では

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{G}{t}\ln\frac{S}{G}\right)\frac{\partial V}{\partial G}+\frac{\kappa^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

が成り立つ．

3.2 変数変換

仮定 3.1 ペイオフ関数が次のようにかけるとする．

$$f(S,G)=S\varphi\left(G/S\right),\quad f_\delta(S,G)=S\varphi_\delta\left(G/S\right)$$

このとき変数変換

$$y=t\ln\frac{G}{S},\quad y_t=t\ln\frac{G_t}{S_t}$$

を行う．$y_t=\int_0^t\ln S_u du-t\ln S_t$ なので

$$dy_t=-t\left(r-q-\frac{1}{2}\kappa^2\right)dt-t\kappa dZ_t^0$$

となる．ここで新しい確率 P^* を $dP^*=e^{-(r-q)t}S_t/S_0dP^0$ によって定義すると，ギルサノフの定理より

$$Z_t^*\stackrel{\mathrm{def}}{=}Z_t^0-\kappa t$$

は P^* ブラウン運動となり，

$$dy_t=-t\left(r-q+\frac{1}{2}\kappa^2\right)dt-\kappa tdZ_t^*$$

と表せる．このとき

$$\begin{aligned}&V(S,Se^{y/t},t)\\&=\inf_\sigma\sup_\tau\mathbb{E}^0\left[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}\left\{S_\tau\varphi\left(e^{y_\tau/\tau}\right)1_{\tau\le\sigma}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+S_\sigma\varphi_\delta\left(e^{y_\sigma/\sigma}\right)1_{\sigma<\tau}\right\}\right|S_t=S,G_t=Se^{y/t}\Big]\\&=\inf_\sigma\sup_\tau\mathbb{E}^*\left[e^{-q(\sigma\wedge\tau-t)}S\left\{\varphi\left(e^{y_\tau/\tau}\right)1_{\tau\le\sigma}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\varphi_\delta\left(e^{y_\sigma/\sigma}\right)1_{\sigma<\tau}\right\}\right|y_t=y\Big]\end{aligned}$$

ゆえに $V\left(S,Se^{y/t},t\right)/S$ は (y,t) のみに依存する関数である．

$W(y,t)=V\left(S,Se^{y/t},t\right)/S$ とおくと

$$\varphi\left(e^{y/t}\right)\le W(y,t)\le\varphi_\delta\left(e^{y/t}\right),\quad\forall y,t$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_*^A&=\left\{(y,t);W(y,t)=\varphi_\delta\left(e^{y/t}\right)\right\}\\\mathcal{E}_*^B&=\left\{(y,t);W(y,t)=\varphi\left(e^{y/t}\right)\right\}\\\mathcal{C}_*&=\left\{(y,t);\varphi\left(e^{y/t}\right)<W(y,t)<\varphi_\delta\left(e^{y/t}\right)\right\}\end{aligned}$$

とおき，σ^*,τ^* を $\mathcal{E}_*^A$, $\mathcal{E}_*^B$ への到達時間とすれば

$$\begin{aligned}W(y,t)=\mathbb{E}^*\left[e^{-q(\sigma^*\wedge\tau^*-t)}\left\{\varphi\left(e^{y_{\tau^*}/\tau^*}\right)1_{\tau^*\le\sigma^*}\right.\right.\\\left.\left.+\varphi_\delta\left(e^{y_{\sigma^*}/\sigma^*}\right)1_{\sigma^*<\tau^*}\right\}\right|y_t=y\Big]\end{aligned}$$

が成立する．

3.3 売り手と買い手の行使領域

ここでは，コール・オプションについて考える．このとき

$$\begin{aligned}\varphi\left(e^{y/t}\right)&=\max\left(1-e^{y/t},0\right)\\\varphi_\delta\left(e^{y/t}\right)&=\max\left(1-e^{y/t},0\right)+\delta\end{aligned}$$

である．δ は正の定数とする．

今，対応するアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格を $W_a(y,t)$ とする．$W_a(y,t)$ は t の減少関数である．$\beta\ge0$ を

$$W_a(0,t)\le\delta$$

を満たす最小の t とする．つまり，$W_a(0,\beta)=\delta$ である．また，そのような t がないときは $\beta=0$ とおく．

定理 3.1

1. $\mathcal{E}_*^A=\{(0,t);t\le\beta\}$.
2. $\mathcal{E}_*^B=\{(y,t);-\infty<y\le y^*(t)\}$．ただし，$y^*(t)$ は負値増加関数.
3. $$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\kappa^2t^2}{2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}-\left(r-q+\frac{\kappa^2}{2}\right)t\frac{\partial W}{\partial y}-qW=\begin{cases}0&\text{if }\ \mathcal{C}_*\\-q+re^{y/t}+\frac{y}{t^2}e^{y/t}&\text{if }\ \mathcal{E}_*^B\end{cases}$$
   が成立する．
4. $y^*(t)$ で
   $$\frac{\partial W}{\partial y}\left(y^*(t),t\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\circ e^{y/t}\right)\Big|_{y=y^*(t)}=-\frac{1}{t}e^{y^*(t)/t}.$$

定理 3.2

1. $\mathcal{E}^A=\{(S,S,t);t\le\beta\}$.
2. $\mathcal{E}^B=\left\{(S,G,t);t\ln\frac{G}{S}\le y^*(t)\right\}$.
3. $\mathcal{C}$ 上で
   $$\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{G}{t}\ln\frac{S}{G}\right)\frac{\partial V}{\partial G}+\frac{\kappa^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$
   が成り立つ.
4. $$\frac{\partial V}{\partial S}\left(S,Se^{y^*(t)/t},t\right)=-1.$$

3.4 売り手と買い手のプレミアム

補題 3.1 $t<\beta$ に対して

$$\frac{\partial W}{\partial y}(0-,t)<\frac{\partial W}{\partial y}(0+,t)$$

が成立する．

定理 3.3 ゲーム・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格 $W(y,t)$ は次のように分解できる．

$$
\begin{aligned}
&W(y,t) = W_e(y,t) \\
&+\mathbb{E}^*\left[\int_t^T e^{-q(u-t)}\left(-q + r^{y_u/u} + \frac{y_u}{u^2}e^{y_u/u}\right)1_{y_u<y^*(u)}du \,\middle|\, y_t = y\right] \\
&-\mathbb{E}^*\left[\int_t^T e^{-q(u-t)}\left\{\frac{\partial W}{\partial y}(0+,u) - \frac{\partial W}{\partial y}(0-,u)\right\}dL(u) \,\middle|\, y_t = y\right]
\end{aligned}
$$

ただし，$L(t)$ は y_t の原点での局所時間とする．$W_e(y,t)$ はヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションの価格であり，第二項は買い手の早期行使プレミアム，第三項は売り手のキャンセルプレミアムである．

4 実行結果

図 1 のパラメータ

S_0	$=$	1	$\sigma(\kappa)$	$=$	0.3
r	$=$	0.05	q	$=$	0
T	$=$	1.0	δ	$=$	0.05

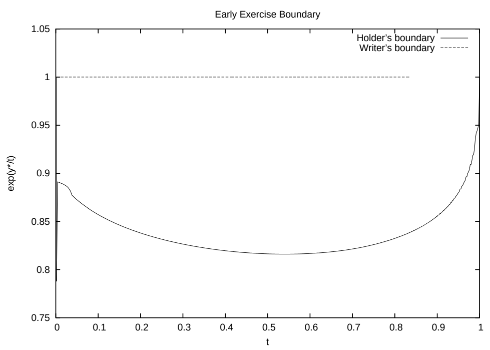

図 1　売り手と買い手の行使境界

図 2，3 のパラメータ

S_0	$=$	100	$\sigma(\kappa)$	$=$	$0.1, \ldots, 0.5$
G_0	$=$	100	q	$=$	0
r	$=$	0.05	δ	$=$	$0.01, 0.05, 0.10, 0.15$
T	$=$	1.0			

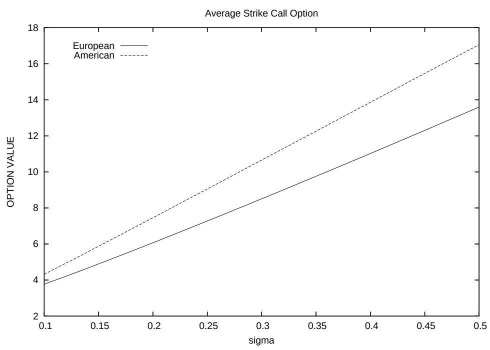

図 2　ヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションとアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションのオプション価格

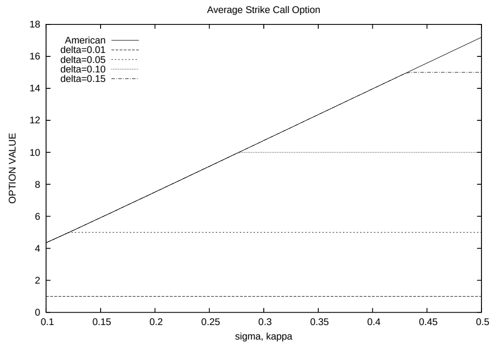

図 3　アメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションとゲーム・アベレージ・ストライク・コール・オプションのオプション価格

図 1 では横軸を時刻 t，縦軸を売り手または買い手の最適行使境界の値とする．アメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションでは $S \geq G$ の領域に行使境界が存在することがわかる．また，ゲーム・アベレージ・ストライク・コール・オプションでは，ある一定の時刻から行使領域が存在することがわかる．

図 2 では横軸をボラティリテイ，縦軸をオプション価格とする．ボラティリテイが増加すれば，ヨーロピアン・アベレージ・ストライク・コール・オプションとアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションとともにオプション価格は増加する．

図 3 では横軸をボラティリテイ，縦軸をオプション価格とする．ペナルティ$\delta = 0.01$ の場合，アメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションには退化しないことがわかる．$\delta = 0.05$，$\delta = 0.10$ そして $\delta = 0.15$ の場合，それぞれあるボラティリティの値まではアメリカン・アベレージ・ストライク・コール・オプションに退化しているが，それ以降は一定の価格を保っている．

5 おわりに

本研究でゲーム・アジアン・オプションでは，売り手と買い手の行使領域やプレミアムなどコール・オプションについて考えてきたが，プット・オプションの場合を考えてみる必要がある．また，算術平均を採用したアベレージ・ストライク・オプション，さらにはアベレージ・レート・オプションの研究もできたら良いと思う．

参考文献

[1] Kifer, Y. (2000)：Game options, *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463.

[2] Kwok, K.Y. (1998)：*Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer.

[3] Wu, L.X., Y.K. Kwok and H.Yu (1999)：Asian options with the American early exercise feature, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **2**(1), 101-111.