単位円板上の高精度関数近似

M2004MM038 佐藤 公治
指導教員　杉浦 洋

1　はじめに

本論文では単位円板上の高精度関数近似について研究する．単位円板上の 2 変数解析関数を $F(x,y)$ とする．極座標変換 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ により，$f(r,t) = F(r\cos t, r\sin t)$ となる．この $f(r,t)$ を偏角 t 方向は Fourier 展開，動径 r 方向は直交多項式展開する．我々は偏角に関する Fourier 展開の係数 k 次 cosine 係数 $\hat{a}_k(r)$, k 次 sine 係数 $\hat{b}_k(r)$ の性質を調べ，$\hat{a}_k(r)/r^k$, $\hat{b}_k(r)/r^k$ が解析的偶関数であることに着目した．従来の関数近似モデルではこのような性質が反映されていない．

その点をふまえ，本論文では新たな関数近似モデルを提案する．区間 $[0,1]$ における，r^k と解析的偶関数との積で表される関数全体からなる，関数族を A_k とし，関数族 A_k に直交基底 $\{\psi_j^{[k]}(r)\}_{j\ge 0}$ を導入する．これにより $f(r,t)$ は直交基底 $\{\psi_j^{[k]}(r)\cos kt\}_{j\ge 0, k\ge 0} \cup \{\psi_j^{[k]}(r)\sin kt\}_{j\ge 0, k\ge 1}$ により Fourier 展開される．我々は $f(r,t)$ の近似モデルとして，この基底による有限 Fourier 級数を採用する．

数値実験では，特異性を持たない関数と特異性を持つ関数について，各モデルの近似性能を比較することにした．

2　偏角に関する Fourier 展開の係数 $\hat{c}_k(r)$ の性質とその近似モデルの性質

2.1　偏角に関する Fourier 展開の係数 $\hat{c}_k(r)$ の性質

単位円板上の 2 変数解析関数 $F(x,y)$ を考える．$F(x,y)$ は単位閉円板 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$ において，x, y それぞれについて解析的であるとする．このとき $F(x,y)$ のテーラー展開は，展開の中心の近傍で絶対収束する．特に原点を中心としたテーラー展開

$$F(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \hat{f}_{kl}\, x^k y^l \;, \hat{f}_{kl} = \frac{F^{(k,l)}(0,0)}{k!\; l!} \quad (1)$$

は，ある $d > 0$ に関して $|x| < d$, $|y| < d$ で絶対収束する．

極座標変換した関数 $f(r,t)$ の偏角に関する Fourier 展開を

$$f(r,t) = F(r\cos t, r\sin t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k(r) e^{ikt}$$
$$= \frac{1}{2}\hat{a}_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty}\{\hat{a}_k(r)\cos kt + \hat{b}_k(r)\sin kt\} \quad (2)$$

と書く．その展開係数

$$\hat{c}_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2}(\hat{a}_k(r) - i\hat{b}_k(r)) \quad (3)$$

を複素 Fourier 係数という．また，

$$\hat{a}_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)\cos kt\,dt,$$
$$\hat{b}_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,t)\sin kt\,dt \quad (4)$$

を実 Fourier 係数という．

ここで，$k \ge 0$ に対して，閉区間 $[0,1]$ 上の解析関数からなる関数族

$$A_k = \{r^k\tilde{g}(r) : \tilde{g}(r) \text{ は } [-1,1] \text{ 上の解析的偶関数 }\}$$

を定義する．

[定理]　式 (3) の複素 Fourier 係数 $\hat{c}_k(r)$ は次の性質を持つ．

$$\hat{c}_k(r) \in A_{|k|} \qquad (-\infty < k < \infty).$$

すなわち，

$$\hat{c}_k(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{c}_{k,|k|+2m}\; r^{|k|+2m} \quad (5)$$

とマクローリン展開できる．

この定理と $\hat{a}_k(r) = 2\mathrm{Re}\hat{c}_k(r)$, $\hat{b}_k(r) = -2\mathrm{Im}\hat{c}_k(r)$ より直ちに次の系を得る．

[系]　式 (4) の実 Fourier 係数は次の性質を持つ．

$$\hat{a}_k(r) \in A_k (0 \le k < \infty), \quad \hat{b}_k(r) \in A_k (1 \le k < \infty) \quad (6)$$

証明は次の補題による．

[補題]　$j \ge 0$, $0 \le k \le j$, $-\infty < l < \infty$ について

$$I_{j,k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^k t\; \sin^{j-k} t\; e^{-ilt}\,dt \quad (7)$$

$|l| > j$ または $j - l$ が奇数ならば $I_{j,k,l} = 0$.

2.2　$\hat{c}_k(r)$ の直交多項式展開

単位円板上の関数の内積

$$(f,g) = (F,G) = \int\int_{x^2+y^2\le 1} F(x,y)G(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^1 \{\int_0^{2\pi} f(r,t)g(r,t)dt\} rdr \quad (8)$$

に関連して，関数空間 A_k に重み r の内積

$$(f,g) \equiv \int_0^1 f(r)g(r)rdr \quad (9)$$

を導入する．この内積について，A_k の基底 $(k \geq 0)$

$$\psi_l^{[k]}(r) = r^k P_l^{(0,k)}(2r^2-1)\ (l \geq 0) \tag{10}$$

は直交基底である．ここで，$P_l^{(0,k)}$ は l 次 Jacobi 多項式である．したがって，基底 $(\psi_l^{[k]})_{l\geq 0}$ による $f(r,t)$ の Fourier 係数 $\hat{c}_k(r)$ の展開を

$$\hat{c}_k(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{c}_{kl}\psi_l^{[k]}(r) \tag{11}$$

とすると，その係数は

$$\hat{c}_{kl} = (4l+2k+2)(\hat{c}_k, \psi_l^{[k]})\ (l \geq 0) \tag{12}$$

である．

2.3 数値積分による $\hat{c}_{kl}$ の計算

数値解法において内積 $(\hat{c}_k, \psi_l^{[k]})$ は数値積分則で計算する．$\hat{c}_k(r) = r^k\hat{d}_k(r^2)$ とし，変数変換 $s = 2r^2-1$ で

$$\begin{aligned}(\hat{c}_k, \psi_l^{[k]}) &= \int_0^1 \hat{c}_k(r)\psi_l^{[k]}(r) r dr \\ &= \int_0^1 r^{2k}\hat{d}_k(r^2)P_l^{(0,k)}(2r^2-1) r dr \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(\frac{1+s}{2})^k \hat{d}_k(\frac{1+s}{2})P_l^{(0,k)}(s)ds\end{aligned} \tag{13}$$

最右辺に N 点数値積分則

$$I_N f = \sum_{j=1}^{N} w_j f(\xi_j) \cong \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

を用いて，$r_j = ((1+\xi_j)/2)^{1/2} (\xi_j = 2r_j^2 - 1)$ とすると，

$$\begin{aligned}(\hat{c}_k, \psi_l^{[k]}) \cong G_{kl} &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} w_j(\frac{1+\xi_j}{2})^k \hat{d}_k(\frac{1+\xi_j}{2})P_l^{(0,k)}(\xi_j) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} w_j r_j^{2k}\hat{d}_k(r_j^2)P_l^{(0,k)}(2r_j^2-1) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} w_j \hat{c}_k(r_j)\psi_l^{[k]}(r_j)\end{aligned} \tag{14}$$

である．これにより，

$$\hat{c}_{kl} \cong (4l+2k+2)G_{kl}\ (l \geq 0) \tag{15}$$

を得る．変数変換 $s = 2r^2-1$ により，積分則 I_N が d 次ならば, 被積分関数 $\hat{c}_k(r)\psi_l^{[k]}(r)$ が $2d$ 次多項式まで正確に積分できる．N 点 Gauss 則の場合，$4N-2$ 次，境界条件に配慮して $N+1$ 点 Radau 則の場合，$4N$ 次多項式まで正確である．

3 関数近似モデル

被近似関数の式 (2) は無限級数で表されているが，有限級数で近似することを考える．DFT(離散 Fourier 変換) すると，近似関数

$$f_n(r,t) = \sum_{k=0}^{n}{}'' \{\tilde{a}_k(r)\cos kt + \tilde{b}_k(r)\sin kt\} \cong f(r,t) \tag{16}$$

を得る．ここで $\sum''$ は初項と末項を 1/2 倍にして和をとることを意味する．ちなみに $\tilde{a}_k(r)$，$\tilde{b}_k(r)$ は

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(r) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(r,t_j)\cos kt_j, \\ \tilde{b}_k(r) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(r,t_j)\sin kt_j, \\ t_j &= \frac{\pi}{n}j\ (0 \leq j \leq 2n-1)\end{aligned} \tag{17}$$

である．式 (17) の $\tilde{a}_k(r)$，$\tilde{b}_k(r)$ を高々m 次多項式 $a_k(r)$, $b_k(r)$ で近似して最終的に有限級数による近似式

$$\begin{aligned}f_{mn}(r,t) &= \sum_{k=0}^{n}{}'' \{a_k(r)\cos kt + b_k(r)\sin kt\}, \\ a_k(r) &\cong \tilde{a}_k(r) \cong \hat{a}_k(r), b_k(r) \cong \tilde{b}_k(r) \cong \hat{b}_k(r)\end{aligned} \tag{18}$$

を得る．

3.1 従来の関数近似モデル

従来の関数近似モデル [1] においては，式 (17) の $\tilde{a}_k(r)$, $\tilde{b}_k(r)$ を m 次以下の Legendre 級数で近似し，

$$\begin{aligned}a_k(r) &= \sum_{j=0}^{m} a_{kj}P_j(2r-1) \cong \tilde{a}_k(r) \cong \hat{a}_k(r), \\ b_k(r) &= \sum_{j=0}^{m} b_{kj}P_j(2r-1) \cong \tilde{b}_k(r) \cong \hat{b}_k(r)\end{aligned} \tag{19}$$

とする．$P_j(x)$ は j 次 Legendre 多項式である．

[アルゴリズム]

式 (17) の $\tilde{a}_k(r)$，$\tilde{b}_k(r)$ の Legendre 多項式による展開係数 $\tilde{a}_{kj}$，$\tilde{b}_{kj}$ は,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{kj} &= \frac{1}{h_j}\int_0^1 \tilde{a}_k(r)P_j(2r-1)dr, \\ \tilde{b}_{kj} &= \frac{1}{h_j}\int_0^1 \tilde{b}_k(r)P_j(2r-1)dr\end{aligned}$$

のように積分表示できる．$h_j = \int_0^1 P_j^2(2r-1)dr = 1/(2j+1)$ である．

式 (19) の $a_k(r)$，$b_k(r)$ の展開係数 a_{kj}，b_{kj} は，それを Gauss 積分則で近似して

$$\begin{aligned}a_{kj} &= \frac{1}{h_j}\sum_{l=1}^{m+1} w_l\tilde{a}_k(r_l)P_j(2r_l-1) \cong \tilde{a}_{kj}, \\ b_{kj} &= \frac{1}{h_j}\sum_{l=1}^{m+1} w_l\tilde{b}_k(r_l)P_j(2r_l-1) \cong \tilde{b}_{kj},\end{aligned} \tag{20}$$

で計算する．r_l，w_l はそれぞれ区間 $[0,1]$ 上の Gauss 積分則の分点と重みである．

式 (20) の $\tilde{a}_k(r_l)$，$\tilde{b}_k(r_l)$ は，変数 t の周期関数 $f(r_l,t)$ の離散型 Fourier 係数で，以下のように計算される．

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(r_l) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(r_l,t_j)\cos kt_j,\\ \tilde{b}_k(r_l) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(r_l,t_j)\sin kt_j,\\ t_j &= \frac{\pi}{n}j\ (0\le j\le 2n-1).\end{aligned}\tag{21}$$

3.2 我々の新たな関数近似モデル

今回，我々の考案した新たな関数近似モデルにおいては，$\hat{a}_k(r)\in A_k$，$\hat{b}_k(r)\in A_k$ を考慮して，直交多項式 (10) を基底とする有限級数による m 次多項式近似

$$\begin{aligned}a_k(r) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (m-k)/2\rfloor} a_{kj}\psi_j^{[k]}(r)\cong \tilde{a}_k(r)\cong \hat{a}_k(r),\\ b_k(r) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (m-k)/2\rfloor} b_{kj}\psi_j^{[k]}(r)\cong \tilde{b}_k(r)\cong \hat{b}_k(r)\end{aligned}\tag{22}$$

を作る．$\lfloor x\rfloor$ は実数 x より小さい整数の最大値である．

[アルゴリズム]

式 (17) の $\tilde{a}_k(r)$，$\tilde{b}_k(r)$ の直交基底 $\{\psi_j^{[k]}(r)\}_{j\ge 0}$ による展開係数 $\tilde{a}_{kj}$，$\tilde{b}_{kj}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{kj} &= \frac{1}{h_{kj}}\int_0^1 \tilde{a}_k(r)\psi_j^{[k]}(r)rdr,\\ \tilde{b}_{kj} &= \frac{1}{h_{kj}}\int_0^1 \tilde{b}_k(r)\psi_j^{[k]}(r)rdr\end{aligned}$$

のように積分表示できる．$h_{kj}=\int_0^1(\psi_j^{[k]}(r))^2rdr = 1/(4j+2k+2)$ である．

式 (22) の $a_k(r)$，$b_k(r)$ の展開係数 a_{kj}，b_{kj} は，右辺の積分を 2.3 節の数値積分で近似して

$$\begin{aligned}a_{kj} &= \frac{1}{4\,h_{kj}}\sum_{l=1}^{N} w_l\tilde{a}_k(s_l)\psi_j^{[k]}(s_l)\cong \tilde{a}_{kj},\\ b_{kj} &= \frac{1}{4\,h_{kj}}\sum_{l=1}^{N} w_l\tilde{b}_k(s_l)\psi_j^{[k]}(s_l)\cong \tilde{b}_{kj}\end{aligned}\tag{23}$$

で計算する．w_l は区間 $[0,1]$ の Gauss 積分則の重み，$s_l=\sqrt{r_l}$，r_l は Gauss 積分則の分点である．

標本点数 N は，$\tilde{a}_k(r)$，$\tilde{b}_k(r)$ が m 次多項式のときに $a_{kj}=\tilde{a}_{kj}$，$b_{kj}=\tilde{b}_{kj}$ となるように定める．N 点 Gauss 則の場合，被積分関数が $2N-1$ 次までの多項式のとき正確に積分できる．このことを考慮して考えると，$N=\lceil (m+1)/2\rceil$ である．$\lceil x\rceil$ は実数 x より大きい整数の最小値である．

$\tilde{a}_k(s_l)$，$\tilde{b}_k(s_l)$ は，変数 t の周期関数 $f(s_l,t)$ の離散型 Fourier 係数で，以下のように計算される．

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(s_l) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(s_l,t_j)\cos kt_j,\\ \tilde{b}_k(s_l) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(s_l,t_j)\sin kt_j,\\ t_j &= \frac{\pi}{n}j\ (0\le j\le 2n-1).\end{aligned}\tag{24}$$

4 数値実験

数式処理ソフトウェア Mathematica5 と C 言語双方で，誤差評価の数値実験を行った．

様々な多項式の次数 $m\ge 0$ と Fourier 展開の次数 $n\le m$ について，式 (18) の近似関数 f_{mn} の最大絶対誤差

$$E_{mn} = \max_{\substack{1\le i\le N\\ 0\le j\le M-1}} |f_{mn}(r_i,t_j)-f(r_i,t_j)| \tag{25}$$

を計算した．ここで

$$\begin{cases} r_i = \left(\cos\frac{\pi(i-\frac{1}{2})}{N}+1\right)/2 & (1\le i\le N)\\ t_j=\frac{2\pi j}{M} & (0\le j\le M-1)\end{cases}$$

であり，$\{r_i\}$ は区間 $[0,1]$ の N 点 Chebyshev 点，$\{t_j\}$ は区間 $[0,2\pi)$ の M 等分点である．具体的には $M=256$，$N=128$ とし，C 言語による実装での結果を示す．

4.1 実験１

複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ に特異点を持たない関数 $F(x,y)=e^x$ の近似を行う．多項式の次数 m，Fourier 展開の次数 n で $m=n=2^l(1\le l\le 8)$ とした結果を図 1 に示す．

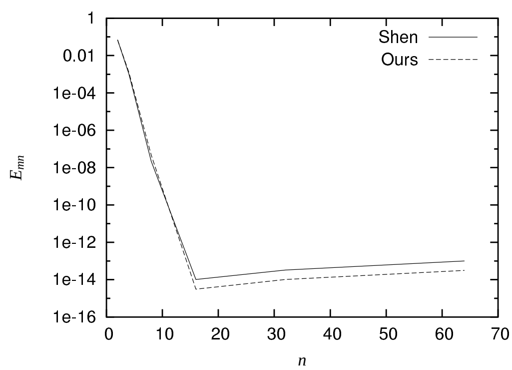

図 1　実験 1 の結果 ($m=n$)

各モデルにおいて，最初，最大絶対誤差は次数 m，n に対し，等比数列的に減少し，10^{-14} 程度になる．その後，ゆるやかに増大する．後者の増大の原因は計算量の増加による丸め誤差の蓄積だと考えられる．

我々の方法と従来の方法での最大絶対誤差はほぼ等しい．展開項数は我々の方法では $\frac{1}{2}m^2+O(m)$ であり，従来法における $2m^2+O(m)$ の約 1/4 である．近似法の効率を展開項数で比べるなら，この問題においては，我々の方法は従来の方法に比べ約 4 倍効率的である．

4.2 実験 2

複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ に特異点を持たない関数 $F(x,y)=e^{x+y}$ の近似を行う．実験 1 と同様に $m=n=2^l(1\le l\le 8)$ とした結果は，実験 1 とほぼ同様であった．

4.3 実験 3

複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ に特異点を持つ関数 $F(x,y)=1/((x+a)^2+y^2+b^2)$ の近似を行う．$m=n=2^l(1\le l\le 8)$ とし，パラメータ $a=1.5$，$b=2.0$ としたときの結果は実験 1，2 とほぼ同様の結果が得られた．

次にパラメータ $a=0$，$b=0.3$ としたとき，我々の方法は従来の方法と比べかなり精度が悪いことがわかった．これはパラメータを変えたことにより複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ における特異点の分布が変化したためであると考えられる．

4.4 実験 4

近似精度に対する特異点の影響を調べるために，実験 3 の被近似関数 $F(x,y)=1/((x+a)^2+y^2+b^2)$ におけるパラメータ (a,b) を系統的に変化させて最大絶対誤差を測定した．最大絶対誤差は a，b の値が小さくなるほど大きくなる傾向があることがわかった．

まず，$(m,n)=(32,32)$ と固定すると最大絶対誤差 $E(a,b)$ は a，b の関数である．図 2 に $E(a,b)=10^{-10}$ の等高線を示す．

$|a|\ge 1$ のときには我々の方法と従来法はほぼ等しい近似精度を持つ．しかし，$|a|<1$ のとき，従来法のほうが小さな b まで精度良く求まることがわかる．

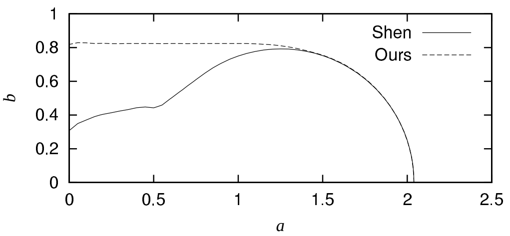

図 2　$E(a,b)=10^{-10}$ の等高線

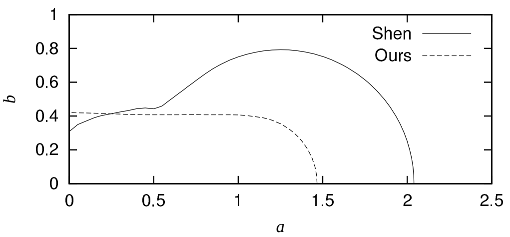

図 3　展開項数がほぼ等しいときの $E(a,b)=10^{-10}$ の等高線

次に 2 つの方法の展開項数をほぼ等しくとって，同じ実験を試みた．(m,m) 次の従来法は $2m^2+2m$ 項で，$(2m,2m)$ 次の我々の方法は $2m^2+3m$ 項とほぼ等しい．具体的には，$(32,32)$ の従来法 (項数 2112) と $(64,64)$ の我々の方法 (項数 2144) について比較実験を行った．最大絶対誤差 $E(a,b)$ は a，b の関数である．図 3 に $E(a,b)=10^{-10}$ の等高線を示す．我々の方法の方が $E(a,b)\ge 10^{-10}$ となる領域が小さい．総合的に見れば我々の方法が従来の方法よりも優れていると言える．しかし，a が 0 に近い狭い領域では，依然として従来法のほうが有利であった．

4.5 考察

実験 3 について，2 変数関数近似において特異点集合と近似領域の距離を求め，その最大絶対誤差との関係を調べることにした．

実単位円板 $D=\{(x',u')\in\boldsymbol{R^2}:x'^2+u'^2\le 1\}\subset\boldsymbol{C^2}$，特異点集合 $P=\{(z,w):(z-a)^2+w^2+b^2=0\}\subset\boldsymbol{C^2}$ について次の定理が成立する．

[定理]

$$d(P,D)^2=\begin{cases} b^2 & ,|a|\le 1,\\ \frac{1}{2}(|a|-1)^2+b^2 & ,|a|>1\end{cases}$$

この定理により，実験 4 の結果を解釈する．図 2 において，$|a|\le 1$ のとき，我々の方法の最大絶対誤差は $b=0.8$ のときに，ほぼ 10^{-10} で一定となっている．よって，距離 $d(P,D)=0.8$ のときに一定の最大絶対誤差となっている．最大絶対誤差は特異点集合 P と近似領域である実単位円板 D との距離 $d(P,D)$ に支配されていると思われる．

$|a|>1$ のとき，$d(P,D)=r$(一定値) の曲線は偏平率 $\sqrt{2}$ の楕円 $d(P,D)^2=\frac{1}{2}(a-1)^2+b^2=r^2$ である．もし，完全に $d(P,D)$ が誤差を支配するなら，$E(a,b)$ の等高線はこの楕円になるはずである．図 2 より，それはむしろ円に近く，この仮説は実験結果と近いものの，それを完全に説明するものではない．

結論として，2 変数関数近似の問題においても特異点集合と近似領域の距離が最大絶対誤差に強く相関していることがわかった．しかし，距離のみで最大絶対誤差を完全に予測することはできない．特異点の配置が問題であると思われる．

5　おわりに

$F(x,y)$ が複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ に特異点を持たない場合，我々の近似法は Shen のものと比べて約 1/4 の展開項数で同等の精度を得ることができた．$F(x,y)$ が特異点を持つ場合，総合的には我々の方法が従来の方法よりも優れているが，特異点が近似領域である実単位円板の中心に近いときのみ Shen の近似法が有利である傾向が見られた．

また，本研究におけるプログラムの実装では計算量とメモリの削減に努め，計算したものが不要になったら次の計算を上書きしていく重ね書きの手法を使用した．最終的に Mathematica での実装はもちろん，高速性，汎用性に対応できる C 言語のプログラムを作成することができた．

参考文献

[1] J.Shen：EFFICIENT SPECTRAL GALERKIN METHODS III；POLAR AND CYLINDRICAL GEOMETRIES, SIAM.J, SCI, COMPUT vol.18, No.6, pp1583-1604(November 1997).