

タグチメソッドにおけるSN比の統計的分布について

M2008MM012 堀井 里佳子

指導教員：松田 真一

1 はじめに

タグチメソッドは近年、日本の中で注目を浴びている実験計画法の1つである。実際に、2009年8月に行われた日本品質管理学会第90回(中部支部第27回)研究発表会においても、タグチメソッド導入における成功例が報告された。タグチメソッドでは田口[3]によると、あまり統計学的根拠を示さずに成功事例によって手法を学ぶという方法をとっている。そこで、本研究ではSN比の統計的分布について研究していく。

2 タグチメソッドとは

タグチメソッドとは田口玄一氏が1950年代から約半世紀に渡り、構築してきた実験計画法の手法の一つである。日本国内では品質工学と呼ばれることもある。タグチメソッドの特徴は、実験中どうしても変化してしまうもの(温度、湿度など)を誤差因子として水準を決めて実験を行う。タグチメソッドの一般的な手順を以下の図1に表す。

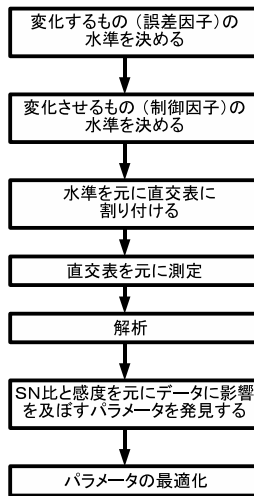


図1 一般的なタグチメソッド

タグチメソッドには大きく分けて静特性と動特性とに分けられる。入出力関係において出力の目標値が変化しない場合を静特性と呼び、出力が入力につれて動く場合、つまりエンジニアード・システムそのものを動特性と呼ぶ。次の節で静特性と動特性のそれぞれの細かい分類およびSN比について紹介する。(田口[2]、立林[4]参照)

3 SN比と統計的分布

永田[1]に基づいてSN比の統計的分布について述べる。

3.1 静特性(望目特性)

データを表1のように得たと仮定する。これは、 m 回の繰り返し実験である。

表1 データ形式(静特性)

水準	N_1, \dots, N_r	平均	不偏分散	SN比
A_1	x_{111}, \dots, x_{1r1} \vdots x_{11m}, \dots, x_{1rm}	\bar{x}_{A_1}	V_{A_1}	γ_{A_1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_a	x_{a11}, \dots, x_{ar1} \vdots x_{a1m}, \dots, x_{arm}	\bar{x}_{A_a}	V_{A_a}	γ_{A_a}

ここで A は制御因子、 N は誤差因子を表している。また、繰り返しとは制御因子と誤差因子の各組み合わせで m 回実験を繰り返すという意味である。 \bar{x}_{A_i} は制御因子 A が i 水準のときの平均を、 V_{A_i} は制御因子 A が i 水準のときの不偏分散とする。このときの標本SN比は、

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \right) \quad (1)$$

となる。ここで得られたデータ x_{ijk} の構造を制御因子の各水準での母平均($\mu'_i = \mu + a_i$)と A_i 水準における誤差因子 N_j 水準の影響の大きさ($n_{ij} = n_i + (an)_{ij}$)とデータを取る際に生じる誤差因子以外の誤差(ε_{ijk})から成り立つと想定する。つまり、

$$x_{ijk} = \mu + a_i + n_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (2)$$

とする。(ここで誤差 ε_{ijk} は $E(\varepsilon_{ijk}) = 0$ 、 $V(\varepsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$ 、 $\sum_{i=1}^a a_i = 0$ 、 $\sum_{i=1}^a n_{ij} = 0$ 、 $\sum_{j=1}^r n_{ij} = 0$ である。)すると母SN比は、

$$10 \log_{10} \frac{(\mu + a_i)^2}{\sum_{j=1}^r \frac{mn_{ij}^2}{(rm-1)} + \sigma_i^2} \quad (3)$$

となる。誤差 ε_{ijk} に正規性を仮定して確率分布を求める。

$$\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} = \left\{ \frac{\bar{x}_{A_i}}{\sqrt{V_{A_i}}} \right\}^2 =$$

$$= \left\{ \frac{(\bar{x}_{A_i} - \mu - a_i)/\sqrt{\sigma_i^2/rm} + \sqrt{rm}(\mu + a_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 \chi^2 (rm-1, \frac{m \sum_{ij} n_{ij}^2}{\sigma_i^2}) / (rm-1) / \sqrt{\sigma_i^2/rm}}} \right\}^2 \quad (4)$$

これから以下の分布になることがわかる。

$$\frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim \left\{ t'' \left(rm - 1, \sqrt{rm} \frac{\mu + a_i}{\sigma_i}, \frac{m \sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2} \right) \right\}^2 \quad (5)$$

2重非心 t 分布の 2 乗は 2 重非心 F 分布となるので

$$\begin{aligned} \frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} &\sim F''(1, rm - 1; \delta_1, \delta_2) \\ \delta_1 &= \frac{rm(\mu + a_i)^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{m \sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。これより静特性（望目特性）は上記で表される 2 重非心 F 分布に従うことがわかる。

動特性（ゼロ点比例式）

入力信号を x_1, \dots, x_m とし、表 2 を仮定する。

表 2 データ形式（動特性）

		x_1, \dots, x_m	傾き	残差分散	SN 比
A_1	N_1	y_{111}, \dots, y_{11m}	$\hat{\beta}_{A_1 N_1}$	$V_{eA_1 N_1}$	γ_{A_1}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	N_r	y_{1r1}, \dots, y_{1rm}	$\hat{\beta}_{A_1 N_r}$	$V_{eA_1 N_r}$	
		A_1 すべてで	$\hat{\beta}_{A_1}$	V_{eA_1}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_a	N_1	y_{a11}, \dots, y_{a1m}	$\hat{\beta}_{A_a N_1}$	$V_{eA_a N_1}$	γ_{A_a}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	N_r	y_{ar1}, \dots, y_{arm}	$\hat{\beta}_{A_a N_r}$	$V_{eA_a N_r}$	
		A_a すべてで	$\hat{\beta}_{A_a}$	V_{eA_a}	

表 1 と同様に A を水準 a の制御因子と設定する。また、 N も表 1 と同様に誤差因子である。ここでは簡便のため各 A_i 水準間の等分散性は仮定しないことにする。このときの標本 SN 比は、

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \right)$$

となる。（ $\beta_{A_i} = \sum \beta_{A_i N_j} / r$ である。）

各々 y_{ijk} のデータ構造式を、各 A_i 全体の傾きと入力信号 x_k 、 A_i を誤差因子 N_j で場合分けしたときの傾きと誤差 ε_{ijk} で成り立つものとする。つまり、

$$y_{ijk} = \beta_{A_i} x_k + (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i}) x_k + \varepsilon_{ijk}$$

とする。（ここで誤差 ε_{ij} は $E(\varepsilon_{ij}) = 0$ 、 $V(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2$ で

ある。）すると母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{\beta_{A_i}^2}{\frac{\sum (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2 \sum x_k^2}{rm-1} + \sigma_i^2} \quad (7)$$

となる。ここで、誤差 ε_{ijk} に正規性を持たせ、望目特性と同様に式変形を行うと以下の分布に従うことがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{(r \sum x_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} &\sim \\ \left\{ t'' \left(rm - 1, \sqrt{r \sum x_k^2} \frac{\beta_{A_i}}{\sigma_i}, \frac{\sum (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2}{\sigma_i^2} \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

これより、動特性（ゼロ点比例式）は、

$$\begin{aligned} \frac{(r \sum x_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} &\sim F''(1, rm - 1; \delta_1, \delta_2) \\ \delta_1 &= \frac{(r \sum x_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{\sum (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (9)$$

となり、動特性も 2 重非心 F 分布に従うことがわかる。

4 二重非心 F 分布の近似法

4.1 二重非心 F 分布とは

二重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ は以下のような確率変数で定義される。

$$F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} := \frac{X_1 / \nu_1}{X_2 / \nu_2} \quad (10)$$

X_1 、 X_2 はそれぞれ自由度 ν_1 、非心度 λ_1 の非心 χ 二乗分布 $\chi^2(\nu_1, \lambda_1)$ 、自由度 ν_2 、非心度 λ_2 の非心 χ 二乗分布 $\chi^2(\nu_2, \lambda_2)$ に従う確率変数とする。二重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の密度関数は、

$$\begin{aligned} p_F &:= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{(r+t)} \frac{(\lambda_1/2)^r}{r!} \frac{(\lambda_2/2)^t}{t!} \\ &\left[\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^t (-1)^{(i+j)} \binom{r}{i} \binom{t}{j} p_f \left(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j \right) \right] \\ &(0 < x < \infty; \nu_1, \nu_2 = 1, 2, \dots; \lambda_1, \lambda_2 > 0) \end{aligned} \quad (11)$$

である。ここにおける $p_f(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j)$ は、自由度 $(\nu_1 + 2i, \nu_2 + 2j)$ の中心 F 分布の密度関数のことである。つまり、

$$\begin{aligned} p_f \left(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j \right) &= \\ \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2+i} x^{\nu_1/2+i-1}}{B(\nu_1/2+1, \nu_2/2+j) (1 + (\nu_1/\nu_2)x)^{(\nu_1+\nu_2)/2+i+j}} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。以上のように二重非心 F 分布はとても複雑であるため、近似式を用いてパーセント点を求めプログラミングをする。

4.2 二重非心 F 分布の近似

ここでは、鳥越 [6] を元によく使われる従来のパーセント点近似と Cornish-Fisher 展開を用いたパーセント点近似について述べる。また、本研究では従来のパーセント点近似法を Tiku 法と呼び、Cornish-Fisher 展開を用いたパーセント点近似法を Torigoe 法と呼ぶことにし、表中では Tiku 法を TI 法、Torigoe 法を TO 法と略して記載する。

Tiku 法 (Tiku[5], 鳥越 [6])

$((F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} + \zeta) / \tau)$ の分布を 3 次以下のモーメントを等置することによって自由度 (ν', ν_2) の中心 F 分布 $F(\nu', \nu_2)$ で近似する。

これより、以下の近似式を得ることが出来る。(鳥越 [6] では積分区間に誤りがあるため Tiku[5] を元に修正した。) なお、詳しい導出法は参考文献を参照されたい。

$$P\{F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} < f\} \approx I_{\nu'_0}(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu')$$

$$= 1 - \frac{1}{B(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu')} \int_0^{\nu'_0} t^{\frac{1}{2}\nu_2-1} (1-t)^{\frac{1}{2}\nu'-1} dt \quad (13)$$

ただし、

$$\nu'_0 = 1 / \left(1 + \frac{\nu' f + \zeta}{\nu_2 \tau} \right)$$

この式を元にプログラミングを行う。

Torigoe 法 (鳥越 [6])

式 (13) の左辺が F 分布で近似できること (カイ 2 乗分布でも表すことが出来ること) を利用し、新たな統計量分布を得て、その分布を Cornish-Fisher 展開して新しい近似式を求める。これより、以下の近似式が成り立つ。なお、詳しい導出法は鳥越 [6] を参照されたい。

$$-\frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha b_{\nu_2}}}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} = u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24 \{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{\nu'^3} - f'_\alpha{}^{3/2} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} - \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576 \{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3} \left(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f'_\alpha{}^{3/2}}{\nu_2^2} \right)^2 \quad (14)$$

ここで、 u_α は $N(0, 1)$ の上側パーセント点を表し、 $f'_\alpha = (f_\alpha + \zeta) / \tau$ を表し、 b_ν は、 $S \sim \chi_\nu^2$ のとき $b_\nu = E(\sqrt{S/\nu})$ と計算されるものを表す。この式を元にプログラミングを行う。

5 二重非心 F 分布のプログラムと結果

この章では、R を使ってパーセント点近似の精度比較を行う。式 (13) の積分部分は midpoint 関数を使用してパーセント点近似値を求めた。式 (14) は方程式で表されているので、ニュートン・ラプソン法を用いてパーセント点近似値を求めた。真値は元々 R に入っているカイ 2 乗乱数を用いたモンテカルロ法のプログラムで求めた。その乱数を 10000 組発生させて、式 (10) を計算し、それを 10000 回繰り返してそのパーセント点の平均を真値とした。標準誤差は平均 0.0003 で真値として十分である。ここでは 90% と 95% のプログラミング結果をそれぞれ記載する。根号の中身が負値となり、値が出なかったところは“-”で表示している。

表 3 $\alpha=95\%$ の結果

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	TI 法	TO 法
5	10	5	5	4.054	4.083	4.085
5	20	5	5	4.029	4.043	4.043
5	30	5	5	4.028	4.041	4.040
10	10	10	10	2.585	3.261	-
10	20	10	10	2.910	3.031	-
10	30	10	10	3.046	3.065	-

表 4 $\alpha=90\%$ の結果

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	TI 法	TO 法
5	10	5	5	3.145	3.149	3.150
5	20	5	5	3.277	3.287	3.287
5	30	5	5	3.332	3.340	3.340
10	10	10	10	2.080	1.834	-
10	20	10	10	2.444	2.452	2.456
10	30	10	10	2.603	2.609	2.610

95 パーセント点近似値の誤差は Tiku 法が最大 0.810、平均が 0.156 となり、Torigoe 法が最大 0.179、平均 0.043 となった。また、90 パーセント点近似値の誤差は Tiku 法が最大 0.565、平均 0.087 となり、Torigoe 法が最大 0.019、平均 0.007 となった。Torigoe 法が計算できない所があることを考えると両方ともあまりいい近似とはいえないことがわかった。

6 タグチメソッドへの応用

6.1 動特性の実例

データは 2 種の金属材料 A_1 と A_2 の劣化試験を行ったときのデータである。(田口 [3] 参照) データは表 5 と表 6 の通りである。このデータから制御因子の各水準ごとにパーセント点を求めると、 A_1 の場合の求める分布は、 $F''(1, 8; 62.400, 6.587)$ となり、 A_2 の場合の求める分布は、 $F''(1, 8; 147.095, 2.357)$ となる。以上の求められた分布のパーセント点を第 5 章で作成した真値のプログラム及びパーセント点近似のプログラムで求めると、表 7 が得られる。パーセント点近似ではあまり値を求めること

表 5 ゼロ点比例式のデータ (A1)

	信号因子 1	信号因子 2	信号因子 3
誤差因子 1	0.0	4.3	8.9
誤差因子 2	1.5	7.2	13.0
誤差因子 3	3.7	11.0	19.4

表 6 ゼロ点比例式のデータ (A2)

	信号因子 1	信号因子 2	信号因子 3
誤差因子 1	0.0	6.9	13.8
誤差因子 2	1.3	9.0	16.7
誤差因子 3	2.7	10.4	18.4

ができず、この実験では実用的ではないと思われる。真値を求めるプログラムでは誤差はあるが実用にまったく向いてないとは言えない位の誤差であり、実用性が望めることがわかった。そこでどの程度、非心度が大きくなると求めた値に信頼度がなくなるかを調べることにする。

6.2 シミュレーション

今回の実データでの結果をふまえて非心度 1 を 0、1、10、100 と変化させ、非心度 2 をそれぞれ 0、2、4、6、8、10 に変化させてパーセント点を求める。また、自由度は誤差因子 3 で信号入力 3 の場合に固定した。結果の一部を表 8 に記載する。

真値を求めるプログラムでの標準偏差の結果は相対的に非常に小さいものとなった。ゼロ点比例式で取りうる非心度では、シミュレーションで求めた真値は信頼できる値であることがわかる。以上からゼロ点比例式では、SN 比の統計的分布を考えることが有効であり実用的であると結論付ける。また、パーセント点近似を用いた場合、真値との誤差が大きい場合も出てくる。しかし、おおよそ小数点第 1 位の誤差であり、まったく実用的ではないとは言えず、場合によっては求められた値が有効となることもあることがわかる。また、非心度 2 が小さければ特に求められた値が有効となることがわかった。

7 まとめ

真値を求めるプログラムは非常に高い精度を持つことがわかった。一方、パーセント点近似式は Tiku 法も Torigoe 法もあまり良い近似値を得られず、あまり精度がよくないことがわかった。タグチメソッドへの応用可否は、動特性においては真値を求めるプログラムでは統計分布を考えることが効果的であると考えられるが、パーセント点近似式では非心度 2 が低い場合では、良い近似値を得ることができ、パーセント点近似が効果的となることがわかった。また、静特性においてもシミュレーションを行った。その結果、真値を求めるプログラムでは統計分布を考えることが効果的であると考えられ、パーセント点近似式では実用化は難しいという結論に至った。

表 7 ゼロ点比例式実データ結果

水準	パーセント点	真値	TI 法	TO 法
A ₁	95%	95.865	97.666	-
	90%	75.708	66.965	-
	10%	19.182	-	-
	5%	16.148	-	-
A ₂	95%	334.249	-	-
	90%	261.330	-	-
	10%	65.748	-	-
	5%	56.047	-	-

表 8 動特性：シミュレーション結果 (95%)

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	TI 法	TO 法
1	8	0	2	4.208	4.395	4.447
1	8	100	2	239.754	-	-
1	8	1	4	6.448	6.557	6.564
1	8	10	6	20.941	21.547	22.273
1	8	1	8	4.606	2.886	1.719
1	8	100	8	132.454	149.063	-

8 おわりに

永田 [1] において 2 重非心 F 分布に従うことが報告されたタグチメソッドにおける SN 比は、実データにおいて実際に有効なものとなるのかそれともまったく使い物にならない机上の空論となるのかを調べた。その結果、複雑な密度関数を持つ 2 重非心 F 分布のパーセント点近似では実用化は難しいとの結論になったが、真値を求めるプログラムによって求めたパーセント点は実用化が望めるとの結論に至った。今回信頼の出来るパーセント点が求められることができ、それを用いて信頼区間や工程能力指数も導出できるようになったことで、今後における品質向上の更なる飛躍が望めるだろう。

参考文献

- [1] 永田 靖: 統計的手法における SN 比, 第 1 回横幹連合総合シンポジウム (2006).
- [2] 田口 玄一: 実験計画法 (第 3 版), 丸善 (1976).
- [3] 田口 玄一: 技術開発のためのタグチメソッド, 日科技連 (1994).
- [4] 立林 和夫: 入門タグチメソッド, 日科技連 (2004).
- [5] Tiku, M. L.: Series expansion for the doubly non-central F-distribution. *Austral. J. Statist.*, **7**, 78-89(1965).
- [6] 鳥越 規夫: 2 重非心 F 分布のパーセント点の近似について,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0916-4.pdf>(1997).