命題論理の導出計算における導出原理適用の制限

M2008MM030 山田敏成
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本論文は、命題論理を対象とし、正導出であり、かつ、線形導出でもある導出計算 (線形正導出) と、線形正導出の制約条件を少し弱めた導出計算について考察する。本稿の 1 節では、小野 [1] にもとづいて命題論理の導出原理と三つの導出計算 R_0、正導出、線形導出を紹介する。2 節では、線形正導出の完全性に対する反例をあげること、および、この完全性において対象を制限したときの一つの性質を述べる。この性質から、ここであげる反例が最も簡単なものの一つになっていることが導かれる。そして、3 節では、線形正導出の制約条件を少し弱めた導出計算について述べる。

2　命題論理の導出計算

この節では、[1] にもとづいて、命題論理の導出原理と三つの導出計算 R_0、正導出、線形導出を紹介する。

まず、命題論理を導入する。命題変数に表すために、$p, q, r, \cdots$ などの記号を用いる。論理結合子は $\wedge$(かつ)、$\vee$(または)、$\supset$(ならば)、$\neg$(でない) を用いる。これらの論理結合子を繰り返し用いることにより、通常の方法で論理式を定義する。

定義 2.1(トートロジー)　命題変数へのすべての真理値の与え方について、論理式 A の真理値が真であるとき、A はトートロジーという。

つぎに、命題論理の導出原理を導入する。命題変数または命題変数の前に否定記号を一つつけた論理式のことをリテラルという。二つのリテラル A と B が相補的であるとは $B = \neg A$ であるか $A = \neg B$ であることとする。リテラル A と相補的なリテラルを A^* と表す。すなわち

$$A \text{ が } p \text{ のとき } A^* = \neg p$$
$$A \text{ が } \neg p \text{ のとき } A^* = p$$

である。

リテラルの有限集合を節という。空集合の場合には空節とよび、それを□で表す。節の有限集合を節集合という。

二つの節 C_1 と C_2 に対し、C_1 に属す一つのリテラル A の相補的なリテラル A^* が C_2 に属しているとする。このとき節 $(C_1 - \{A\}) \cup (C_2 - \{A^*\})$ を C_1 と C_2 からの導出節という。二つの節から導出節を作りだす操作のことを導出原理という。

導出原理を繰り返し適用し、節集合から一つの節を導き出す過程を記述するために、命題論理の導出計算 R_0 を導入する。R_0 が扱うのは節であり、R_0 のただ一つの論理的操作は導出原理であるものとする。これらのことをより明確な形で述べるために、与えられた節集合 S から節 C に到る R_0 の導出図を次のように定義しておく。

定義 2.2(R_0 の導出図)

(1)　節 C が節集合 S に属すときには、C だけからなる図は S から C に到る R_0 の導出図である。

(2)　S から節 C_1 に到る R_0 の導出図 $\mathcal{P}_1$ と S から節 C_2 に到る R_0 の導出図 $\mathcal{P}_2$ がすでに定義されているとする。さらに C_1 と C_2 から導出原理により節 C が得られるものとする。このとき、つぎのように与えられる図は S から C に到る R_0 の導出図である。

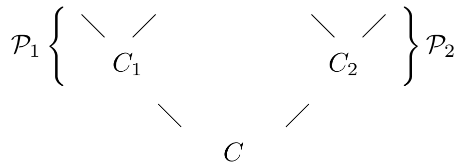

図 2.1　S から C に到る R_0 の導出図

節集合 S から節 C に到る R_0 の導出図が存在するとき、R_0 で、S から C は導出可能であるという。

定義 2.3　節 C がリテラルの集合 $\{A_1, \cdots, A_k\}$ であるとき $\bigwedge C$ は、論理式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$ を表すものとする。とくに、$\bigwedge$ □は恒真な論理式を表すものとする。空でない節集合 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$ に対し S の論理和標準形表現 $d(S)$ を

$$d(S) = (\bigwedge C_1) \vee \cdots \vee (\bigwedge C_m)$$

と定める。

R_0 の導出可能性と、トートロジーの間にはつぎの関係がある。

補助定理 2.1(導出計算 R_0 の完全性)　S を任意の空でない節集合とする。このとき、$d(S)$ がトートロジーであるための必要十分条件は、R_0 で、S から□が導出可能になることである。

上で定義した R_0 の導出を制限した導出も知られている。以下では、その例である、正導出と線形導出について述べる。

定義 2.4(正導出)　節 C に含まれるリテラルがすべて命題変数であるとき、C を正節と呼ぶことにする。与えられた導出図 $\mathcal{P}$ に現われるすべての導出原理の適用において、一方の節が正節であるとき、$\mathcal{P}$ を正導出による導出

図という。さらに、節集合 S から節 C に到る正導出の導出図が存在するとき、正導出で、S から C は導出可能であるであるという。

正導出が完全であることは、[1] の練習問題と補助定理 2.1 から示される。すなわち、つぎの補助定理が成立する。

補助定理 2.2(正導出の完全性)　S を任意の空でない節集合とする。このとき、$d(S)$ がトートロジーであるための必要十分条件は、正導出で、S から□が導出可能になることである。

定義 2.5(線形導出)　節集合 S から空節□に到る導出図 $\mathcal{P}$ に対し、$\mathcal{P}$ の中の節の列 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ および $D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}$ が存在して、つぎの 3 条件を満たすとき、$\mathcal{P}$ は線形導出による導出図であるという。

(1)　$C_0 \in S$ かつ $C_n = $□である。
(2)　各 $k \geq 0$ に対し、C_{k+1} は C_k と D_k からの導出節である。
(3)　各 $k \geq 0$ に対し、$D_k \in S$ またはある $j \leq k$ に対し $D_k = C_j$ である。

また、節集合 S から節 C に到る線形導出の導出図が存在するとき、線形導出で、S から C は導出可能であるであるという。

線形導出が完全であることは Chang and Lee [2] で述べてある。すなわち、つぎの補助定理が成立する。

補助定理 2.3(線形導出の完全性)　S を任意の空でない節集合とする。このとき、$d(S)$ がトートロジーであるための必要十分条件は、線形導出で、S から□が導出可能になることである。

3　線形正導出

この節では、線形正導出の完全性に対する反例をあげること、および、この完全性において対象を制限したときの一つの性質を述べる。この性質からここであげる反例が最も簡単なものの一つになっていることが導かれる。
まず、線形正導出を定義しておく。

定義 3.1(線形正導出)　節集合 S から節 C に到る R_0 の導出図 $\mathcal{P}$ が 2 条件

(1)　正導出による導出図である
(2)　線形導出による導出図である

を満たすとき、$\mathcal{P}$ は線形正導出による導出図という。また、節集合 S から節 C に到る線形正導出の導出図が存在するとき、線形正導出で、S から C が導出可能であるという。

補助定理 2.2 と補助定理 2.3 で、正導出、および線形導出の完全性が成立することを述べた。この結果から、線形正導出の完全性が予想されるが、この予想には反例がある。

定理 3.1　節集合 S を

$$S = \{\{a\}, \{\neg a, b\}, \{\neg a, c\}, \{\neg b, \neg c\}\}$$

とおく。このとき、つぎの 2 条件が成立する。

(1)　$d(S)$ はトートロジーである。
(2)　S から□に到る線形正導出による導出図は存在しない。

証明　補助定理 2.1 より、$d(S)$ がトートロジーであることを示すには、S から□が R_0 で導出可能であることを示せばよい。これは、つぎの図 3.1 で示される。

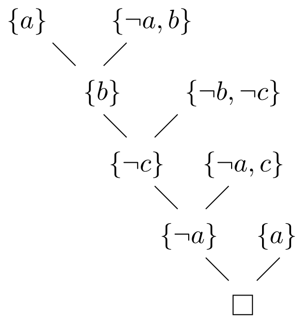

図 3.1　S から□に到る R_0 の導出図

つぎに、S から□に到る線形正導出による導出図 $\mathcal{P}$ が存在すると仮定する。線形導出であることから $\mathcal{P}$ はつぎの図 3.2 の形をしている。

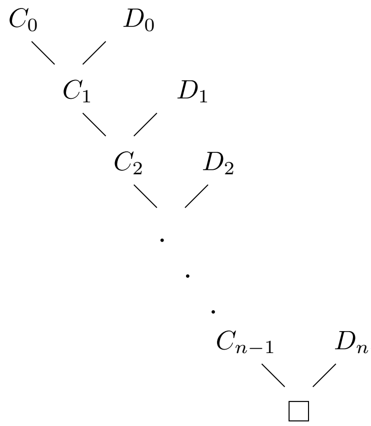

図 3.2　線形導出による導出図 $\mathcal{P}$

ただし、$C_0, C_1, \cdots, C_n$、および、$D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}$ は定義 2.5 の条件を満たす。

S に属す正節は $\{a\}$ だけなので、C_0 か D_0 は $\{a\}$ である。$C_0 = \{a\}$ としても一般性は失われない。このとき、$(D_0, C_1) = (\{\neg a, b\}, \{b\})$ または $(D_0, C_1) = (\{\neg a, c\}, \{c\})$ である。どちらの場合でも $D_1 = \{\neg b, \neg c\}$ であるので、$(D_1, C_2) = (\{\neg b, \neg c\}, \{\neg c\})$ または $(D_1, C_2) = (\{\neg b, \neg c\}, \{\neg b\})$ である。どちらの C_2 も正節でない。$\mathcal{P}$ は正導出による導出図なので D_2 は正節で、定義 2.5 の条件より $D_2 \in S$ である。よって $D_2 = \{a\}$ である。したがって、どちらの C_2 に対しても、C_2 と D_2 から導出節

を導くことはできない。これは $\mathcal{P}$ が導出図であることに矛盾する (図 3.3 参照)。 ■

$\{a\}$ $\{\neg a, b\}$ $\{a\}$ $\{\neg a, c\}$

$\{b\}$ $\{\neg b, \neg c\}$ $\{c\}$ $\{\neg b, \neg c\}$

$\{\neg c\}$ $\times$ $\{\neg b\}$ $\times$

図 3.3 線形正導出でないことを示す図

上の反例では、節集合 S に節 $\{\neg b, \neg c\}$ が存在した。そこで、S に $\{\neg b, \neg c\}$ のような、否定のリテラルを二個以上持つ節が存在しない場合について考える。

節 C は、C に属す否定のリテラルが一個以下のとき N 節、二個以下のとき N2 節、ちょうど一個のとき N!節、ちょうど二個のとき N2!節とよぶことにする。

以下では、節集合 S に非 N 節が存在しない。すなわち、S のどの節も N 節である場合を考える。

定理 3.2 節集合 S において、S のどの節も N 節とする。このとき、S から正節 C に到る正導出による導出図があるならば、S から C に到る線形正導出による導出図がある。

上の定理を証明するために、つぎの補助定理を示す。

補助定理 3.3 節集合 S において、S のどの節も N 節とする。さらに、S から節 C に到る正導出による導出図を $\mathcal{P}$ とする。このとき、$\mathcal{P}$ に現れる節はすべて N 節である。

証明 $\mathcal{P}$ の中に現れる節の数を $n(\mathcal{P})$ として、$n(\mathcal{P})$ についての帰納法で題意を示す。

$n(\mathcal{P}) = 1$ のとき：$\mathcal{P}$ を構成する節は一つだけで、それは C である。$C \in S$ だから C は N 節である。

$n(\mathcal{P}) > 1$ のとき：C を導出節とする導出原理の適用がある。すなわち、ある C_1 と C_2 が存在して、C_1 と C_2 から正導出によって C が導出されている。$\mathcal{P}$ の中に、S から C_1 に到る正導出による導出図 $\mathcal{P}_1$ がある。また、$\mathcal{P}$ の中に、S から C_2 に到る正導出による導出図 $\mathcal{P}_2$ がある。すなわち、$\mathcal{P}$ はつぎの形である。

$\mathcal{P}_1 \left\{ \; C_1 \right.$ $\left. C_2 \; \right\} \mathcal{P}_2$

C

図 3.4 導出図 $\mathcal{P}$

$n(\mathcal{P}) > n(\mathcal{P}_1)$ と $n(\mathcal{P}) > n(\mathcal{P}_2)$ と帰納法の仮定により、$\mathcal{P}_1$ に現われる節および $\mathcal{P}_2$ に現われる節は、すべて N 節である。とくに、C_1 と C_2 も N 節である。したがって、C_1 と C_2 は正節と N!節かあるいはどちらも N!節である。正節と N!節の場合、C は正節で、どちらも N!節の場合、C は N!節である (図 3.5 参照)。$\mathcal{P}$ に現われる節は、C か $\mathcal{P}_1$ に現われるか $\mathcal{P}_2$ に現われるかなので、どれも N 節である。

正節 N!節 N!節 N!節

正節 N!節

図 3.5 C を導出節とする導出原理の適用

定理 3.2 の証明 S から C に到る正導出による導出図を $\mathcal{P}$ とする。$\mathcal{P}$ の中の N!節を C_1 とする。C_1 が D_1 と D_2 からの導出節とすると、$\mathcal{P}$ が正導出による導出図なので、D_1 と D_2 のうち一つが正節でもう一つが非 N 節である。これは補助定理 3.3 に矛盾する。これより、C_1 は導出節ではない。すなわち、$\mathcal{P}$ の中の N!節はどれも導出節でなく、S の元である。さらに、補助定理 3.3 より、導出節はどれも正節である。これより、$\mathcal{P}$ は S から C に到る線形正導出による導出図である。

定理 3.2 の逆は明らかなので、補助定理 2.1 よりつぎが成立する。

系 3.4 節集合 S において、S のどの節も N 節とする。このとき、$d(S)$ がトートロジーであるための必要十分条件は、線形正導出で、S から□が導出可能になることである。

定理 3.1 の S に属する N2!節は一つだけで、他の要素はどれも N 節であった。したがって、系 3.4 より定理 3.1 の例は最も簡単な反例の一つといえる。

4 線形 N 導出

定理 3.2 では、S のどの節も N 節の場合に、S から正節に到る R_0 の導出図が存在すれば、S から C に到る線形正導出による導出図が存在することを示した。また、定理 3.1 より S の中に N2!節がある場合は、S から正節 C に到る R_0 の導出図があっても、S から正節 C に到る線形正導出による導出図があるとは限らないことがわかった。そこで、線形正導出の条件を少し弱めて、線形 N 導出を考えてみることにした。

定義 4.1(線形 N 導出) 節集合 S から節 C に到る R_0 の導出図 $\mathcal{P}$ が 2 条件

(1) $\mathcal{P}$ におけるすべての導出原理の適用において、一方の節が N 節である

(2) $\mathcal{P}$ は線形導出による導出図である

を満たすとき、$\mathcal{P}$ を線形 N 導出による導出図という。また、節集合 S から節 C に到る線形 N 導出の導出図が存在するとき、線形 N 導出で、S から C は導出可能であるという。

しかし、研究の結果、線形 N 導出の完全性は成立しない。すなわち、$d(S)$ がトートロジーであっても、S から□に到る線形 N 導出による導出図は存在しない場合があることがわかった。

定理 4.1　節集合 S を

$$S = \{\{a\}, \{b\}, \{\neg a, \neg b, c\}, \{\neg a, \neg b, d\}, \{\neg a, \neg b, e\}, \{\neg a, \neg b, f\}, \{\neg c, \neg d, g\}, \{\neg e, \neg f, h\}, \{\neg g, \neg h\}\}$$

とおく。このとき、つぎの 2 条件が成立する。

(1)　$d(S)$ はトートロジーである。
(2)　S から□に到る線形 N 導出による導出図は存在しない。

証明　補助定理 2.1 より、$d(S)$ がトートロジーであることを示すには、S から□が R_0 で導出可能であることは修士論文で示してある。

S から□に到る線形 N 導出による導出図 $\mathcal{P}$ が存在するとして、矛盾を導く。定義 2.5 より、$\mathcal{P}$ に $C_0, C_1, \cdots, C_n$ および $D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}$ が存在して、これらの節は定義 2.5 の条件をみたす。

$C_0, D_0 \in S$ で、$\mathcal{P}$ が線形 N 導出による導出図であることより、一般性を欠くことなく、

$(1)(C_0, D_0) = (\{a\}, \{\neg a, \neg b, c\})$,
$(2)(C_0, D_0) = (\{a\}, \{\neg a, \neg b, d\})$,
$(3)(C_0, D_0) = (\{a\}, \{\neg a, \neg b, e\})$,
$(4)(C_0, D_0) = (\{a\}, \{\neg a, \neg b, f\})$,
$(5)(C_0, D_0) = (\{b\}, \{\neg a, \neg b, c\})$,
$(6)(C_0, D_0) = (\{b\}, \{\neg a, \neg b, d\})$,
$(7)(C_0, D_0) = (\{b\}, \{\neg a, \neg b, e\})$,
$(8)(C_0, D_0) = (\{b\}, \{\neg a, \neg b, f\})$

のいずれかが成り立つと仮定できる。以下では、上の各場合について、$C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots$ を求めることを行う。わかりやすくするため、C_i が求められていて、条件

C_i と $D_i \in S$ から線形 N 導出の導出原理により
C_{i+1} が導かれる

を満たす (D_i, C_{i+1}) が $(D_{i,1}, C_{i+1,1}), \ldots, (D_{i,k}, C_{i+1,k})$ のとき、すなわち、

$$\begin{array}{ccc} C_i & & D_{i,j} \\ \diagdown & & \diagup \\ & C_{i+1,j} & \end{array}$$

$(j = 1, \ldots, k)$ のように適用する図がかけるとき、これを、

$$\begin{array}{ccc} & C_i & \\ D_{i,1} \diagup & D_{i,2} | \ \ldots & \diagdown\ D_{i,k} \\ C_{i+1,1} \quad C_{i+1,2} & \ldots & C_{i+1,k} \end{array}$$

のように表す。$k = 0$ のときは、

$$C_i \times$$

と表す。$\mathcal{P}$ が S から□に到る R_0 の導出図であることより、ある i に対して、$C_i =$ □となるから、上の手順でできる図に□が現われる $(*)$。

以下、場合分けして矛盾を導く。

(1) のとき：上で定めた図は以下の図 4.1 のようになる。

C_0 … $\{a\}$
| D_0 … $|\{\neg a, \neg b, c\}$
C_1／… $\{\neg b, c\}$
| D_1 … $\{b\}$／ ＼$\{\neg c, \neg d, g\}$
C_2／… $\{c\}$ $\{\neg b, \neg d, g\}$
| D_2 … $\{\neg c, \neg d, g\}|$ ／$\{b\}$
C_3／… $\{\neg d, g\}$
| D_3 … $\{\neg a, \neg b, d\}$／ ＼$\{\neg g, \neg h\}$
C_4／… $\{\neg a, \neg b, g\}$ $\{\neg d, \neg h\}$ ×
| D_4 … $\{a\}$／ ＼$\{b\}$
C_5／… $\{\neg b, g\}$ $\{\neg a, g\}$
| D_5 … $\{b\}$／ ＼ $\{\neg g, \neg h\}$ ／ ＼$\{a\}$
C_6／… $\{g\}$ $\{\neg b, \neg h\}$ $\{\neg a, \neg h\}$ $\{g\}$
| D_6 …$\{\neg g, \neg h\}$＼ $\{b\}$＼ ／$\{a\}$ ／$\{\neg g, \neg h\}$
C_7／… $\{\neg h\}$
| D_7 … $|\{\neg e, \neg f, h\}$
C_8／… $\{\neg e, \neg f\}$ ×

図 4.1　(1) の図

上の図で□は現われない。これは、$(*)$ に矛盾する。

(2) のとき、S の c と d を入れ変えても S であることから、(1) と同様に示される。

(3) のとき、(1) と同様に、つぎの図から矛盾を示すことができる。

C_0 … $\{a\}$
| D_0 … $|\{\neg a, \neg b, e\}$
C_1／… $\{\neg b, e\}$
| D_1 … $\{b\}$／ ＼$\{\neg e, \neg f, h\}$
C_2／… $\{e\}$ $\{\neg b, \neg f, h\}$
| D_2 … $\{\neg e, \neg f, h\}|$ ／$\{b\}$
C_3／… $\{\neg f, h\}$
| D_3 … $\{\neg a, \neg b, f\}$／ ＼$\{\neg g, \neg h\}$
C_4／… $\{\neg a, \neg b, h\}$ $\{\neg f, \neg h\}$ ×
| D_4 … $\{a\}$／ ＼$\{b\}$
C_5／… $\{\neg b, h\}$ $\{\neg a, h\}$
| D_5 … $\{b\}$／ ＼ $\{\neg g, \neg h\}$ ／ ＼$\{a\}$
C_6／… $\{h\}$ $\{\neg b, \neg g\}$ $\{\neg a, \neg g\}$ $\{h\}$
| D_6 …$\{\neg g, \neg h\}$＼ $\{b\}$＼ ／$\{a\}$ ／$\{\neg g, \neg h\}$
C_7／… $\{\neg g\}$
| D_7 … $|\{\neg c, \neg d, g\}$
C_8／… $\{\neg c, \neg d\}$ ×

図 4.2　(3) の図

(4) のとき、S の e と f を入れ替えても S であることから、(3) と同様に示される。

(5)〜(8) のとき、S の a と b を入れ変えても S であることから、(1)〜(4) と同様にそれぞれ示される。■

参考文献

[1] 小野寛晰,「情報科学における論理」, 日本評論社,1994.

[2] C. Chang and R. C. Lee, “Symbolic logic and mechanical theorem proving”, Academic Press, 1973.