

# 生産過程改良投資を加えたJITによる生産在庫モデルの研究

M2008MM025 庭山哲暢

指導教員:澤木勝茂

## 1 はじめに

本論文では売り手と買い手が互いにコストが最小となるような戦略協定を結んでいるとし、JIT生産システムを用いて総コストを最小とする生産管理モデルを考察する。

アプローチとして、第2章では基礎的なJIT生産管理に投資によるリードタイムの短縮、投資をすることによって不良品発生率を低くすることができるモデルを考察する。両者ともに、製造の前に改良がなされるとし、売り手と買い手のすべてのコストを足した総コストを最小とするような発注量、発注回数、生産過程改良後の故障率、リードタイムを求める。そして数値例で過去のモデルと比較し、考察する。第3章では、第2章のモデルに加えて初期発注量とその後の発注量が変更できるモデルを考察する。第2章と比較し有用性を確認する。

## 2 JITによる生産管理の基礎モデル

この章では、生産過程改良投資とリードタイム短縮ができるJITによる生産管理モデルを考察する。JITの特徴として、発注を受けた製品はすぐに買い手へと輸送されるとする。モデルを定式化し、数値例でモデルの有用性を考察する。

### 2.1 記号の定義

$D$	: 1年あたりの需要量 (1年 = 50週とする)
$Q$	: 発注量
$m$	: 発注回数 (無限に発注できる)
$A$	: 1回あたりの買い手のオーダーコスト
$S$	: 売り手のセットアップコスト
$L$	: リードタイムの長さ
$P$	: 売り手の生産性 ( $P > D$ )
$TRC$	: 売り手と買い手のコストを足した総コスト
$C_v$	: 売り手の生産コスト
$C_p$	: 買い手の購入コスト ( $C_v > C_p$ )
$r$	: 1年あたりの在庫維持コスト
$a_i$	: $i$ 期の最短リードタイム
$b_i$	: $i$ 期の標準リードタイム
$e_i$	: 1日あたり $i$ 期のリードタイム短縮コスト
$k$	: 安全在庫因子
$R(L)$	: リードタイム $L$ にするためのリードタイム短縮コスト
$\theta$	: 総発注量を製造する間に不良品が発生する確率
$\theta_0$	: 生産過程を改良する前の状態で、総発注量を製造する間に不良品が発生する確率
$\beta$	: 1年あたりの改良投資の割合
$\delta$	: 投資 $I(\theta)$ による $\theta$ の減少の割合 ( $q = \frac{1}{\delta}$ )

$L_i$  :  $n$ 個あるリードタイム要素の  $i$ 個の長さを最短期間に短縮した時のリードタイムの長さ ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

### 2.2 モデルの仮定

次に、このモデルの仮定を示す。

1. 需要の速度は製品を生産する速度を超えることがないとする。 ( $P > D$ )
2. リードタイム  $L$  の決定数  $X$  は、平均  $\mu L$  と標準偏差  $\sigma\sqrt{L}$  の正規分布であらわされる。
3. 再発注点 ( $ROP$ ) はリードタイム時の期待需要量と安全在庫の合計数と同じであり、 $ROP = \mu L + k\sigma\sqrt{L}$
4. 買い手の在庫量は連続的に観察される。
5. リードタイム  $L$  は  $n$ 個の互いに独立した要素でできており、時間が短い要素ほど時間を短縮した際に発生する短縮コストが少ない。
6. 不良品発生率である  $\theta$  は連続決定変数である。生産過程改良投資額は、 $qI(\theta) = q \log(\theta_0/\theta)$  ( $0 < \theta \leq \theta_0$ ) であらわされる。ただし、 $\theta$  は現状の故障率  $\theta_0$  より改善される数値とする。よって、1年あたりの生産過程改良投資額は  $qI(\theta) = q\beta \log \frac{\theta_0}{\theta}$  となる。

### 2.3 モデルの定式化

各コストを求めるために、定式化していく。買い手の総期待コスト (Total Expected Cost for purchaser =  $TEC_p$ ) は  $TEC_p = \text{オーダーコスト} + \text{在庫維持コスト} + \text{リードタイム短縮コスト}$  となる。オーダー1回あたりにかかるオーダーコストは  $A$  であるので、1年あたりのオーダーコストは  $(D/Q)A$  となる。また、買い手の在庫維持コスト  $I_p$  は再発注ポイント ( $ROP$ ) =  $\mu L + k\sigma\sqrt{L}$  から、

$$I_p = \left( \frac{Q}{2} + k\sigma\sqrt{L} \right) rC_p \quad (1)$$

となる。次に、リードタイム短縮コスト ( $L$ ) を求める。 $i$ 期のリードタイムの標準期間  $b_i$  と最短期間  $a_i$  であるので、よって、 $R(L)$  は  $L \in (L_i, L_{i-1}]$  において、

$$R(L) = 7e_i(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} e_j(b_j - a_j) \quad (2)$$

となる。次に、売り手側のコストを求める。売り手側の総コスト (Total Expected Cost for vender =  $TEC_v$ ) は、 $TEC_v = \text{セットアップコスト} + \text{在庫維持コスト} + \text{生産過程改良投資} + \text{輸送コスト}$  となる。期待セットアップコストは  $\frac{D}{mQ}S$  となる。次に、在庫維持コストを求める。売り手側の在庫維持コストは売り手の在庫量  $\times rC_v$  なので、

$$rC_v \left\{ \frac{Q}{2} \left\{ m \left( 1 - \frac{D}{P} \right) \right\} - 1 + \frac{2D}{P} \right\} \quad (3)$$

である．また，生産過程改良投資は  $\beta q \log \frac{\theta_0}{\theta}$  なので，売り手の期待総コスト  $TEC_v$  は

$$TEC_v(Q, m, \theta) = \frac{DS}{Qm} + \frac{Q}{2} rC_v \left\{ m \left( 1 - \frac{D}{P} \right) - 1 + \frac{2D}{P} \right\} + \beta q \log \frac{\theta_0}{\theta} \quad (4)$$

となる．次に，不良品コストを求める．製品を  $mQ$  製作する間に不良品が発生する確率が  $\theta$  であり， $g$  は不良品を交換する際のコストで，1年あたりの期待不良品コストは  $\frac{gmQD\theta}{2}$  となる．よって総期待コスト  $TEC$  は

$$TEC(Q, L, \theta, m) = \frac{D}{Q} \left[ A + \frac{S}{m} + R(L) \right] + \frac{Q}{2} \left[ \left( m \left( 1 - \frac{D}{P} \right) - 1 + \frac{2D}{P} \right) rC_v + rC_p + gmD\theta \right] + rC_p k \sigma \sqrt{L} + \beta q \log \frac{\theta_0}{\theta} \quad (5)$$

## 2.4 最適解の導出

次に，このモデルが最適解をもつことを示し，解を求める手順を出す． $0 < \theta \leq \theta_0$  において，この問題は非線形モデルとして計算できる．

$$\begin{aligned} \text{Min } TEC(Q, L, \theta, m) &= \frac{D}{Q} \left[ A + \frac{S}{m} + R(L) \right] \\ &+ \frac{Q}{2} \left[ \left( m \left( 1 - \frac{D}{P} \right) - 1 + \frac{2D}{P} \right) rC_v + rC_p + gmD\theta \right] \\ &+ rC_p k \sigma \sqrt{L} + \beta q \log \frac{\theta_0}{\theta} \quad (0 < \theta \leq \theta_0) \end{aligned} \quad (6)$$

となる．次に，以下の手順で  $Q, m, \theta, L$  を求めていく．

Step1:各  $L_i, i = 1, 2, \dots, n$  について， $\theta_i = \theta_0$  として，次の (i)-( ) をおこなう．

(i)  $\theta_i$  を代入して， $m_i$  を出し， $\theta_i$  と  $m_i$  から  $Q_i$  を計算する

( )  $Q_i$  と  $m_i$  から  $\theta_i$  を計算する．

( )  $Q_i, m_i, \theta_i$  が変化しなくなるまで (i)-( ) を繰り返し，それが解  $Q_i^*, m_i^*, \theta_i^*$  となる．

Step2:もし，Step1 の解が  $\theta_i^* \leq \theta_0$  なら， $L_i$  で与えられた最適値である．

$TRC(Q_i^*, m_i^*, \theta_i^*, L_i)$  を計算して Step4 へ

Step3:もし， $\theta_i^* > \theta_0$  なら， $\theta_0 = \theta_0$  と定めて， $m_i^*$  を計算し， $m_i^*$  から  $\theta_i^*$  を決定する．

そして  $TRC(Q_i^*, m_i^*, \theta_i^*, L_i)$  を求める．

Step4: $TRC(Q_s, m_s, \theta_s, L_s)$

$= \min_{i=0,1,\dots,n} TRC(Q_i^*, m_i^*, \theta_i^*, L_i)$  と定める．そして， $TRC(Q_s, m_s, \theta_s, L_s)$  は最適解となる．

## 2.5 数値計算

手順にしたがって，各記号に数値を代入して数値計算をおこなう． $D=1000$  個/年， $P=3200$  個/年， $A=25$  円/オーダー， $S=200$  円/オーダー， $C_p=20$  円/個， $C_v=20$  円/個，

$r=0.2$ ， $k=2.33$ ， $\sigma=7$  個/週， $i=0.1$ /円/年， $g=15$  円/故障数， $q(\theta)=400 \ln(0.0002/\theta)$ ，リードタイムは表 2.4 のように定める．表 2 は計算した結果である．図 1 は  $m, i$  を

表 1 リードタイムデータ

リードタイム要素	標準期間	最短期間	短縮コスト
1	20	6	0.1
2	20	6	1.2
3	16	9	5.0

表 2 各パラメータと総コスト

$i$	$L_i$	$m^*$	$Q^*$	$\theta^*$	総コスト
1	42	3	129	0.00001034	2300.5
1	42	4	129	0.00001034	2296.8
2	28	3	170	0.00001046	2358.3

固定して  $\theta$  を動かしたときの総コストの変化を表したものである．表 2 より，今回のような数値の設定では，リー

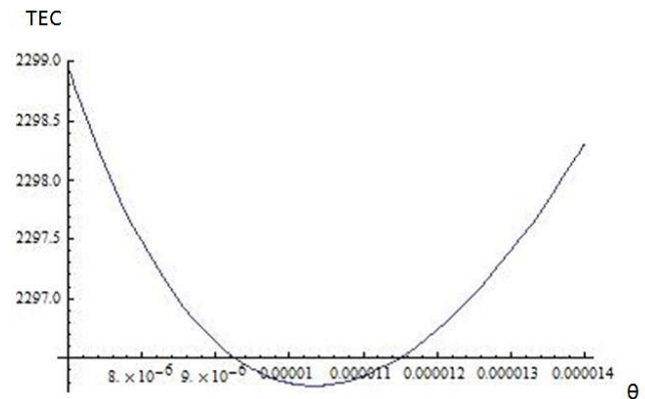


図 1 基礎モデル  $m = 4, i = 1$

ドタイム短縮は 1 回のみおこなうことが費用がとてもしないので 42 日として，かつ発注回数は 3 回よりも 4 回として発注費用より在庫維持費を減らすような政策をとるようにした．従来のモデルでは総コストは 3034 となっており，大きくコストを削減できたといえる．

## 3 発注量を変更できるモデル

このモデルでは前の章のモデルに加えて，総コストを下げる手段として初期発注量と 2 回目以降発注を異なった量で発注できるモデルを検証する．初期発注量はリードタイムと安全在庫で決定され，2 回目以降の発注量は初期発注量以上となる．前の章と比較して，総コストの減少と各パラメータの値の変化を考察する．

### 3.1 記号の定義と仮定

記号の定義と仮定は第 2 章と同じとする．

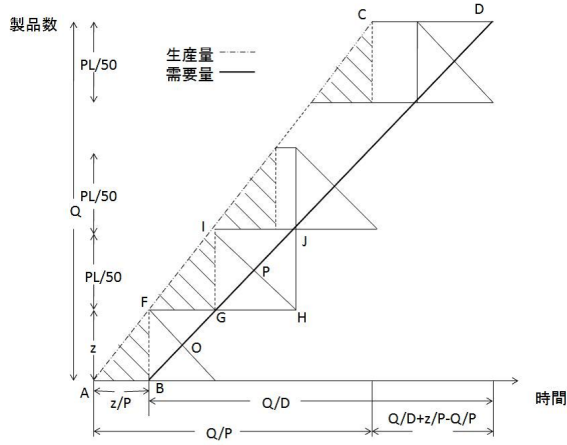


図2 売り手と買い手の在庫量

### 3.2 モデルの定式化

発注方法はバッチ発注のため、 $Q$  は売り手から買い手に  $m$  回で輸送される。初期発注量はリードタイムと安全在庫によって決定されるため、初期発注量  $z$  は  $z = DL/50 + k\sigma\sqrt{L}$  となる。ここで、発注回数  $(m-1)$  の発注量は  $PL/50$  であり、売り手がリードタイムに生産する量である。よって  $Q$  は

$$Q = \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} + (m-1)\frac{PL}{50} \quad (7)$$

となる。また、 $m$  は

$$m = 1 + \frac{50Q}{PL} - \frac{D}{P}k - \frac{50k\sigma}{P\sqrt{L}} \quad (8)$$

で与えられる。 $PL/50 > DL/50 + k\sigma\sqrt{L}$  の場合の買い手と売り手の総在庫は図1に示す。点線と生産ラインで形成された斜線が引かれている三角形の面積の合計が売り手の手持ち (WIP: Work In Progress) 在庫であるので、WIP 在庫の1年あたりの全体の製品の量に対する割合は  $D/Q$  から WIP 在庫コストは

$$\frac{D}{2PQ} \left[ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right] C_v r \quad (9)$$

である。次に、買い手の在庫量を求めるため、全体の在庫量を求める。台形 ABDC は、1 サイクル毎の総在庫コストであるので

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right) + \frac{1}{P} \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right) \right] Q \quad (10)$$

となる。これより、買い手の在庫コストは、総在庫から売り手の在庫を引いたもので

$$\left[ \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) + \frac{D}{P} \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right) - \frac{D}{2PQ} \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} \right] C_v r \quad (11)$$

それゆえ、システム1年あたりの総在庫維持コストは、

$$\left\{ \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) + \frac{D}{P} \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right) \right\} C_p r + \frac{D}{2PQ} \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} \times (C_v - C_p) r \quad (12)$$

その他のコストは第2章と同じであるので、総コスト  $TRC$  (Total Relevant cost) は

$$TRC = \left\{ \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) + \frac{D}{P} \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right) \right\} C_p r + \frac{Q}{2PD} \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} \times (C_v - C_p) r + \beta q \log \frac{\theta_0}{\theta} + \frac{D}{Q} \left[ mR(L) + A + \frac{S}{m} \right] + \frac{gmQD\theta}{2} \quad (13)$$

### 4 最適解の導出

$L$  について求めるために、 $TRC$  を  $L$  で偏微分して

$$\frac{\partial TRC(Q, L, \theta, m)}{\partial L} = \left\{ \frac{D}{P} \left( \frac{DL}{50} + \frac{k\sigma}{2\sqrt{L}} \right) \right\} C_p r + \frac{D}{2PQ} \left\{ 2 \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right) \left( \frac{D}{50} + \frac{k\sigma}{2\sqrt{L}} \right) + 2(m-1) \left( \frac{P}{50} \right)^2 L \right\} (C_v r - C_p) r - 7m \left( \frac{D}{Q} \right) e_1 \quad (14)$$

つぎに、 $Q_{min}$ ,  $\theta$  の値を求めるために、 $\frac{\partial TEQC(Q, L, \theta, m)}{\partial \theta} = 0$  とおいて、

$$\theta = \frac{2\beta q}{gmDQ} \quad (15)$$

が得られる。また、

$$\frac{\partial TRC(Q, L, \theta, m)}{\partial Q} = -\frac{D}{Q^2} \left[ A + \frac{S}{m} + mR(L) \right] + \frac{D}{2PQ^2} \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} \times (C_v - C_p) r + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) C_p r + \frac{gmD\theta}{2} \quad (16)$$

となるので、 $\theta$  に式(13)を代入して、 $\frac{\partial TRC(Q, L, \theta, m)}{\partial Q} = 0$  として  $Q^*$  の値を求めると  $Q$  は正であるため、

$$Q_{min} = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1} \quad (17)$$

となる。ただし、

$$B_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) C_p r, \quad B_2 = \beta q \quad (18)$$

$$B_3 = -\frac{D}{2P} \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} \\ \times (C_v - C_p)r - D[mR(L) + A + S/m]. \quad (19)$$

求めた  $Q_{min}$ ,  $\theta$  を式 (13) に代入すると  $TRC_{min}$  は

$$TRC_{min} \\ = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{4B_1} \left( 1 - \frac{D}{P} \right) C_p r \\ + \frac{-B_2\sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{4PDB_1} \\ \times \left\{ \left( \frac{DL}{50} + k\sigma\sqrt{L} \right)^2 + (m-1) \left( \frac{PL}{50} \right)^2 \right\} (C_v - C_p)r \\ - \frac{2DB_1}{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}} [mR(L) + A + S/m] + \beta q \\ + \beta q \log \frac{gmD\theta_0}{2\beta q} \left( \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1} \right) \quad (20)$$

となる。 $Q_{min}$  と  $TRC_{min}$  は初め、 $m = 1$ ,  $L = L_0$  から計算する。

つぎに、 $TRC$  が  $Q, m$  を与えたときに、 $L$  について最適解をもつことを示す。 $\frac{\partial^2 TRC(L)}{\partial L^2}$  を求めると、

$$\frac{\partial^2 TRC(L)}{\partial L^2} = -\frac{1}{4} \frac{D}{P} \frac{k\sigma}{L^{3/2}} C_p r + \frac{D}{2PQ} \left\{ \frac{3Dk\sigma}{100\sqrt{L}} \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{D}{50} \right)^2 + 2(m-1) \left( \frac{P}{50} \right)^2 \right\} (C_v - C_p)r \\ < 0 \quad (C_v < C_p) \quad (21)$$

となる。よって、 $Q, m$  を与えたとき、 $L$  について  $TRC$  は上に凸であることがいえる、 $L$  の範囲内にコスト関数が最小となる点が存在することがいえる。また、 $\frac{\partial TRC(L)}{\partial L}$  は単調増加であり、これより  $TRC$  は  $L$  について、 $L$  の範囲に極値が 1 つ以下であることがいえる。よって式 (7) を式 (13) に代入したとき、 $L$  の範囲内に  $TRC$  が最小となる最適解が存在することがいえる。

ここから、次の手順で最適解を求めていく。

Step1:各  $m = 1$ ,  $L = L_0$  から、 $Q_{min}$ ,  $TRC_{min}$  を式 (17), (20) から計算する。

Step2: $Q = Q_{min}$  として、 $Q$  と  $L$  から  $m$  を式 (8) より決定する。

Step3: $Q$  と Step2 の  $m$  から、総コストが最小となるような  $L$  を選択する。

Step5: $Q$  と選択した  $L$  から式 (8) より、 $m$  を求める。

Step6: $m, Q, L$  から  $Q_{min}, TRC_{min}$  の値を式 (17), (20) より求める。

Step7:もし、求めた  $TRC_{min}$  が前の  $TRC_{min}$  より大きいなら、Step2 へ戻る。以下の場合 Step8 をおこなう。

Step8:求めた  $TRC_{min}, m, L$  の値を最適解だとして記録する。求めた  $L$  を固定して、先ほど求めた  $m$  の値を繰り上げと繰り下げした整数の値を出し。そこから総コストを計算し、低いほうの値を  $m^*$  として、そのときの  $Q, m, L$  の値を記録する。

Step8: $m^*$  から、式 (14)=0 として、 $L^*$  の値を求める。

Step9: $m^*, L^*$  から式 (7) に代入して  $Q^*$  の値を求める。

Step10: $m^*, L^*, Q^*$  から  $\theta^*$  を計算する。

Step11:もし、 $\theta^* > \theta_0$  なら、 $\theta^* = \theta_0$  とおく。

Step11:求めた  $m^*, L^*, Q^*, \theta^*$  を式 (13) に代入し総コストを求める。それが最終的な最小総コストとなる。

#### 4.1 数値例

表 3 は第 2 章と同じ数値を代入した結果である。

表 3 総コストと各パラメータ

$Q^*$	$m^*$	$L$	$\theta^*$	総コスト	$z$
543	2	42	0.0000098	2137	159.9

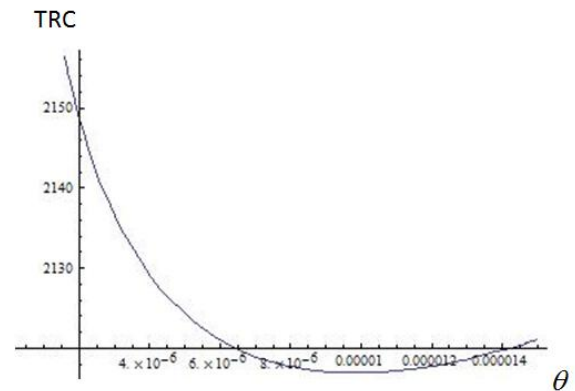


図 3 発注量を変えられるモデル

第 2 章と比較すると、総コストは 6.93 %ほど低くなっている。発注回数は前の章のモデルと比較して発注回数は 2 回減って 2 回となり、改良後の故障率はあまり変化がみられなかった。

#### 5 おわりに

今回の結果から、不良品発生率は両モデルともに大きく減少させる政策が有効であると判明した。そのように生産工程を改良することは、総コストを削減できるだけでなく、生産性が大きく向上していることが考えられ、コスト削減以外のメリットも存在することがいえる。今後の発展としては、生産過程改良後の条件を細かく付け加えて、より生産現場で使われるような設定をしたい。

#### 参考文献

- [1] L. Y. Ouyang and H. C. Chang : Lot size reorder point inventory model with controllable lead time and set-up cost, *International Journal of System Science*, Vol.33, No.8, pp.635-642(2002).
- [2] E. L. Porteus : Optimal lot sizing, process quality improvement and set-up cost reduction. *Operations Research*, Vol.34, No.1, January-February(1986).
- [3] 大野 耐一: 「JIT 生産システム」(The Operations Research Society of Japan) <http://www.orsj.or.jp/wiki/wiki/index.php/>