タグチメソッドのSN比における信頼区間の適用方法の研究

M2009MM024 高橋知也
指導教員：松田眞一

1　はじめに

近年製造業を中心に関心が深い実験計画法の１つにタグチメソッドがあげられる。実際に、参加している日本品質管理学会中部支部若手研究会でもタグチメソッド関連の発表が多い。

堀井 [1] では、二重非心 F 分布に従うことが報告された SN 比は、実データにおいて、実際に分布の適用が有効なものなのかを様々な近似法を元に、それぞれプログラミングを行い、求めたパーセント点と統計解析ソフト R による非心カイ 2 乗分布の乱数を発生させモンテカルロ法によって求めたパーセント点について調べた。そこで、本研究では SN 比における信頼区間の適用や実データにおける実験を行い評価し、田口氏の経験則の SN 比の再現性 ±3db が妥当であるかを検証する。

2　タグチメソッドとは

タグチメソッドとは、実験計画法から発展した技術で、田口玄一氏が構築してきた手法と考え方の体系である。日本国内では品質工学と呼ばれることもある。

実験計画法は、調べたい因子の結果に与える効果を少ない実験回数で評価するための統計的な実験手法であり、タグチメソッドは実験計画法を基に、ばらつきや劣化を減らしその上で目標値にあわせこむために発展したものであり、品質問題が発生してから統計手法を使って解決することの効率の悪さに疑問を感じ、品質問題を未然に防止するための技術である。そして、タグチメソッドは以下のような手順で行う。(立林 [7]、[8] 参照)

入出力とシステムチャートの検討
理想の機能と目標値の検討
変化するもの (誤差因子) の水準の設定
変化させるもの (制御因子) の水準の設定
水準を直交表を元に割り当て、組合せの作成
直交表を元に測定
測定で得られたデータの解析
SN 比と感度を元にデータに影響を与える
制御因子の発見
制御因子の最適化

タグチメソッドでは入出力関係のシステムにおいて、大きく分けて静特性と動特性の二種類に分ける。また、SN 比、直交表、損失関数、MTS 方法など多彩な方法論からなるが、本研究では SN 比について調べていく。

3　SN 比について

3.1　SN 比とは

入力と出力の関係におけるノイズに対する強さを表す尺度であり、この値が大きいほどノイズに強い。(堀井 [1]、立林 [7] 参照)

3.2　静特性 (望目特性) の SN 比

3.2.1　静特性とは

出力を変えるための入力がない、つまり出力が一定の値であることが求められるシステムの事を静特性をいう。【例】乾電池、蛍光灯等

3.2.2　SN 比の求め方と統計的分布

制御因子が A だけで、誤差因子が N だけの m 回繰り返しの実験で得られたデータを表 1 とする。

表 1　静特性の実験データ

水準	$N_1 \cdots N_r$	平均	不偏分散	SN 比
A_1	$x_{111} \cdots x_{1r1}$ $\vdots$ $x_{11m} \cdots x_{1rm}$	$\bar{x}_{A1}$	V_{A1}	γ_{A1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	$x_{a11} \cdots x_{ar1}$ $\vdots$ $x_{a1m} \cdots x_{arm}$	$\bar{x}_{Aa}$	V_{Aa}	γ_{Aa}

$$\begin{cases} \bar{x}_{Ai} : \text{制御因子 } A \text{ が } i \text{ 水準のときの平均} \\ V_{Ai} : \text{制御因子 } A \text{ が } i \text{ 水準のときの不偏分散} \end{cases}$$

このとき標本 SN 比は、

$$\gamma_{Ai} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \right) \tag{1}$$

となる。ここで得られたデータ x_{ijk} を以下のように成り立つと考える。

$$x_{ijk} = \mu_i' + n_{ij} + \epsilon_{ijk} = \mu + a_i + n_{ij} + \epsilon_{ijk} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mu_i' : \text{制御因子の各水準での母平均 } (\mu_i' = \mu + a_i) \\ n_{ij} : A_i\text{水準における誤差因子 } N_j\text{水準の影響の大きさ} \\ \qquad (n_{ij} = n_i + (an)_{ij}) \\ \epsilon_{ijk} : \text{データを取る際に生じる誤差因子以外の誤差} \end{cases}$$

(ここで誤差ϵ_{ijk}は $E(\epsilon_{ijk}) = 0$、$V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$、$\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$、$\sum_{i=1}^{a} n_{ij} = 0$ である。)
よって母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{(\mu + a_i)^2}{\sum_{j=1}^{n} \frac{mn_{ij}^2}{(rm-1)} + \sigma_i^2} \tag{3}$$

となる。次に、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を仮定して確率分布を求める。

$$\frac{\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} = \left\{ \frac{\bar{x}_{Ai}}{\sqrt{V_{Ai}}} \right\}^2 =$$

$$\left\{ \frac{(\bar{x}_{Ai} - \mu - a_i)/\sqrt{\sigma_i^2/rm} + \sqrt{rm}(\mu + a_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 \chi^2 \left(rm-1, \frac{m\sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2}\right)/(rm-1)}/\sqrt{\sigma_i^2/rm}} \right\}^2 \quad (4)$$

よって次のような分布になることがわかる。

$$\frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim \left\{ t'' \left(rm-1, \sqrt{rm}\frac{\mu + a_i}{\sigma_i}, \frac{m\sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2} \right) \right\}^2 \quad (5)$$

2 重非心 t 分布の 2 乗は 2 乗非心 F 分布となるので

$$\frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim \quad F''(1, rm-1; \delta_1, \delta_2)$$

$$\delta_1 = \frac{rm(\mu + a_i)^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{m\sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2} \quad (6)$$

となる。これより静特性 (望目特性) は上記で表される 2 重非心 F 分布に従うことがわかる。(堀井 [1]、永田 [5] 参照)

3.3 動特性 (ゼロ点比例式) の SN 比

3.3.1 動特性とは

入力の変化に応じて、出力も変化するシステムの事を動特性という。

【例】水道の蛇口、自動車の加速等

3.3.2 SN 比の求め方と統計的分布

入力信号を $x_1, \cdots, x_m$ とし、制御因子 A、誤差因子 N のときの実験で得られたデータを表 2 とする。

表 2 動特性の実験データ

		$x_1, \cdots, x_m$	傾き	残差分散	SN 比
A_1	N_1	$y_{111}, \cdots, y_{11m}$	$\hat{\beta}_{A_1}$	V_{eA_1}	γ_{A_1}
	$\vdots$	$\vdots$			
	N_r	$y_{1r1}, \cdots, y_{1rm}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	N_1	$y_{a11}, \cdots, y_{a1m}$	$\hat{\beta}_{A_a}$	V_{eA_a}	γ_{A_a}
	$\vdots$	$\vdots$			
	N_r	$y_{ar1}, \cdots, y_{arm}$			

また、ここでは簡便のため各 A_i 水準間の等分散性は仮定しない。このとき標本 SN 比は、

$$\gamma_{Ai} = 10\log_{10}\left(\frac{\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}}\right) \quad (7)$$

となる。次に、y_{ijk} のデータを各 A_i 全体の傾きと入力信号 x_k、A_i を誤差因子 N_j で場合分けしたときの傾きと誤差 ϵ_{ijk} で以下のように成り立つと考える。

$$y_{ijk} = \beta_{Ai}x_k + (\beta_{AiNj} - \beta_{Ai})x_k + \epsilon_{ijk} \quad (8)$$

(ここで誤差ϵ_{ijk}は $E(\epsilon_{ijk}) = 0$、$V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$である。)

よって母 SN 比は、

$$10\log_{10}\frac{\beta_{Ai}^2}{\frac{\sum(\beta_{AiNj} - \beta_{Ai})^2\sum x_k^2}{rm-1} + \sigma_i^2} \quad (9)$$

ここで、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を持たせ、静特性と同様に式変形をすると以下の分布に従うことがわかる。

$$\frac{(r\sum x_k^2)\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} \sim \quad F''(1, rm-1; \delta_1, \delta_2)$$

$$\delta_1 = \frac{(r\sum x_k^2)\beta_{Ai}^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{\sum(\beta_{AiNj} - \beta_{Ai})^2}{\sigma_i^2} \quad (10)$$

よって、動特性も 2 重非心 F 分布に従うことがわかる。(堀井 [1]、永田 [5] 参照)

4 2 重非心 F 分布とは

2 重非心 F 分布 $F(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$ は以下のような確率変数で定義される。

$$F_{v_1,v_2,\lambda_1,\lambda_2} := \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \quad (11)$$

X_1、X_2 はそれぞれ自由度 v_1、非心度 λ_1 の非心 χ 二乗分布 $\chi^2(v_1, \lambda_1)$、自由度 v_2、非心度 λ_2 の非心 χ 二乗分布 $\chi^2(v_2, \lambda_2)$、に従う独立な確率変数とする。2 重非心 F 分布 $F(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の密度関数は、

$$p_F := \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^(r+t)\frac{(\lambda_1/2)^r}{r!}\frac{(\lambda_2/2)^r}{t!} \bullet$$

$$\left[\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{t}(-1)^{(i+j)}\binom{r}{i}\binom{t}{j}p_f(x; \frac{v_1}{2}+i, \frac{v_2}{2}+j) \right]$$

$$(0 < x < \infty; v_1, v_2 = 1, 2, \cdots; \lambda_1, \lambda_2 > 0) \quad (12)$$

である。ここにおける $p_f(x; \frac{v_1}{2}+i, \frac{v_2}{2}+j)$ は、自由度 (v_1+2i, v_2+2j) の中心 F 分布の密度関数のことである。つまり、

$$p_f(x; \frac{v_1}{2}+i, \frac{v_2}{2}+j) =$$

$$\frac{(v_1/v_2)^{v_1/2+i}}{B(v_1/2+i, v_2/2+j)}\frac{x^{v_1/2+i-1}}{(1+(v_1/v_2)x)^{(v_1+v_2)/2+i+j}} \quad (13)$$

となる。(堀井 [1]、鳥越 [9] 参照)

5 SN 比の信頼区間の導出

2 重非心 F 分布に従う確率変数を F'' とし、下側点の真値を f_1、上側点の真値を f_2 とすると

$$P_r\{f_1 \le F'' \le f_2\} = 1 - \alpha$$

と表せ、信頼区間は $[f_1, f_2]$ となる。f_1、f_2 の計算は $\frac{\alpha}{2}$ ずつ行った。

5.1 静特性

静特性の標本 SN 比は式 (1) で与えられていて、2 重非心 F 分布との関係は式 (6) のようになっている。すなわち、

$$P_r\{f_1 \le \frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \le f_2\} \quad (14)$$

となり、これを基に γ_{Ai} の不等式に変形する。

標本 SN 比より、

$$\frac{\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} = 10^{\frac{\gamma_{Ai}}{10}} \quad (15)$$

が導かれ、これを $\frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}}$ に代入すると、$rm10^{\frac{\gamma_{Ai}}{10}}$ となる。これを γ_{Ai} について解くと、

$$10\log_{10}\frac{f_1}{rm} \le \gamma_{Ai} \le 10\log_{10}\frac{f_2}{rm} \quad (16)$$

となり、信頼区間は $[10\log_{10}\frac{f_1}{rm}, 10\log_{10}\frac{f_2}{rm}]$ となる。

5.2 動特性

動特性の標本 SN 比は式 (7) で与えられていて、2 重非心 F 分布との関係は式 (10) のようになっている。すなわち、

$$P_r\{f_1 \le \frac{(r\sum x_k^2)\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} \le f_2\} \tag{17}$$

となり、これを基に γ_{Ai} の不等式に変形する。
標本 SN 比より、

$$\frac{\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} = 10^{\frac{\gamma_{Ai}}{10}} \tag{18}$$

が導かれ、これを $\frac{(r\sum x_k^2)\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}}$ に代入すると、$(r\sum x_k^2)10^{\frac{\gamma_{Ai}}{10}}$ となる。これを γ_{Ai} について解くと、

$$10\log_{10}\frac{f_1}{r\sum x_k^2} \le \gamma_{Ai} \le 10\log_{10}\frac{f_2}{r\sum x_k^2} \tag{19}$$

となり、信頼区間は $[10\log_{10}\frac{f_1}{r\sum x_k^2}, 10\log_{10}\frac{f_2}{r\sum x_k^2}]$ となる。

6 SN 比の信頼区間を求めるプログラム

静特性の場合、引数に【実験データ・制御因子水準数・誤差因子水準数・データ採取の繰り返し回数、有意水準】、動特性の場合は【実験データ・信号因子データ・制御因子水準数・誤差因子水準数・信号因子水準数・有意水準】とし、プログラム内で信頼区間を求めるために必要なパーセント点等の値を求め、静特性、動特性と共【自由度・非心度・SN 比の信頼区間・SN 比・信頼率】を出力するプログラムを作成した。ここでのパーセント点は、前廣 [3] で、MLC-M 法によりパーセント点近似を求めるプログラムが作られている。式 (11) を以下のように考えている。

$$aF^{'}(v_1,\lambda_1) = a\frac{X_1^{'}/v_1}{X_2^{'}/v} = F^{''}(v_1,v_2,\lambda_1,\lambda_2) \tag{20}$$

従って、二重非心 F 分布の確率は次のように変換できる。

$$Pr\{F^{''} \le x\} = Pr\{aF^{'} \le x\} = Pr\{F^{'} \le \frac{x}{a}\} \tag{21}$$

よって $(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$ を決定して x/a を用いて非心 F 分布の分布関数より求める。堀井 [1] での、モンテカルロ法によりパーセント点を求める方法に比べ、精度は多少落ちるが 95 パーセント点近似値での誤差も最大で 0.059、平均 0.015 であり精度は十分である。また、モンテカルロ法に比べ計算時間はかなり速くなる。

7 実験への応用

7.1 静特性の実例 1

あるサーキットでのカーレースにおける 1 周のタイムをシミュレーションにより採取したデータである。車の重量（1.6kg)、ギア比（4.0)、回転部分重量（0.225)、車体の種類（インプレッサ）は水準を一定にしてグリップが制御因子（3 水準）で、モーターが誤差因子（3 水準）でデータを取っている。(堀井 [1] 参照) また、制御因子の各水準ごとに 2 回の繰り返し実験を行っている。堀井 [1] では数値に間違いがあるので、このシミュレーションでは修正してある。そして、作成したプログラムにかけ表 3 のような結果を得た。(堀井 [1]、かわにし [2] 参照)

表 3 プログラムの結果

水準	v_1	v_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	5	564588.2	14.28939	95	48.45	40.89	43.87
					90	47.67	41.35	
A2	1	5	77894.98	14.83425	95	39.66	32.19	35.15
					90	38.89	32.66	
A3	1	5	15386.6	4.825625	95	37.59	27.47	31.16
					90	36.46	28.05	

表 4 SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	7.56	4.58	2.98
	90	6.32	3.8	2.52
A2	95	7.47	4.51	2.96
	90	6.23	3.74	2.49
A3	95	10.12	6.43	3.69
	90	8.41	5.3	3.11

7.2 静特性の実例 2

ある合板の接着力を高めるために、因子として接着剤の種類 A を 3 水準、前処理の方法 B を 3 水準設、繰り返し 3 回の二元配置実験を行っている。この実験から表 5 のデータを得ている。また、作成したプログラムにかけ表 6 のような結果を得た。(立林 [8] 参照)

表 5 合板実験データ

	B1	B2	B3		B1	B2	B3		B1	B2	B3
	31	35	35		50	60	45		40	45	42
A1	35	40	30	A2	40	50	45	A3	39	46	39
	31	35	35		40	55	50		34	40	36

表 6 プログラムの結果

水準	v_1	v_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	8	1904.02	5.616162	95	25.96	17.76	20.94
					90	25.1	18.26	
A2	1	8	1261.5	13	95	21.45	14.43	17.26
					90	20.74	14.88	
A3	1	8	1952.375	8.0299	95	25.04	17.29	20.34
					90	24.24	17.77	

表 7 SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	8.2	5.02	3.18
	90	6.84	4.16	2.68
A2	95	7.02	4.19	2.83
	90	5.86	3.48	2.38
A3	95	7.75	4.7	3.05
	90	6.47	3.9	2.57

7.3 動特性の実例

7.4 カーサーキットのシミュレーション

あるサーキットでのカーレースにおける 1 周タイムをシミュレーションにより採取したデータである。車の重量 (1.6kg)、回転部分重量 (0.225)、車体の種類 (インプレッサ) は水準を一定にして、制御因子をギア比 (3 水準)、誤差因子をグリップ (4 水準)、信号因子をモータートルク

(3 水準) とした。このシミュレーションから表 8 の結果を得た。また、作成したプログラムにかけ表 9 のような結果を得た。(かわにし [2] 参照)

表 8 カーシミュレーションのデータ

A1		x1	x2	x2	A2	x1	x2	x3	A3	x1	x2	x3
	N1	16.65	16.29	16.10		17.35	16.47	16.97		19.49	17.57	17.51
	N2	15.77	14.83	14.58		16.11	15.68	15.57		18.92	18.14	16.57
	N3	15.24	14.35	13.98		16.25	14.88	14.46		19.13	18.47	16.74
	N4	14.90	13.71	13.16		15.50	15.36	15.24		17.68	16.57	18.33

表 9 プログラムの結果

水準	v_1	v_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	11	119.5854	0.06628	95	10.94	2.7	6.15
					90	10.12	3.25	
A2	1	11	133.788	0.03788	95	11.41	3.24	6.64
					90	10.6	3.79	
A3	1	11	120.8111	0.001308	95	11	2.77	6.2
					90	10.19	3.33	

表 10 SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	8.24	4.79	3.45
	90	6.87	3.97	2.9
A2	95	8.17	4.77	3.4
	90	6.81	3.96	2.85
A3	95	8.23	4.8	3.43
	90	6.86	3.99	2.87

7.5 実例の考察

静特性の実例 1 では、SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 %で最大 8.24db、最小 8.17db、平均 8.21db、90 %で最大 6.87db、最小 6.81db、平均 6.85db となった。そして、SN 比の再現性の ±3db と比較してみると、再現性の幅 6db より実例のシミュレーションで求めた幅が短くなることはなかったが、±3db のように対称ではなく、平均して信頼率 95 %で +4.79db、−3.43db、90 %で +3.97db、−2.87db となり下側寄りになった。

静特性の実例 2 では、SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 %で最大 8.20db、最小 7.02db、平均 7.64db、90 %で最大 6.84db、最小 5.86db、平均 6.39db となった。そして、SN 比の再現性の ±3db と比較してみると、再現性の幅 6db より実例のシミュレーションで求めた幅が短くなることは A2 の信頼率 90 %のとき以外ではなかった。また、表 5 と表 8 の SN 比の差とは、SN 比と信頼区間の上側、下側それぞれとの距離であり、±3db のように対称ではなく、平均して信頼率 95 %で +4.64db、−3.02db、90 %で +3.85db、−2.54db となり下側寄りになった。

動特性の実例では、SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 %で最大 10.08db、最小 9.25db、平均 9.67db、90 %で最大 8.39db、最小 7.70db、平均 8.04db となった。そして、SN 比の再現性の ±3db と比較してみると、再現性の幅 6db より実例のシミュレーションで求めた幅が短くなることはなかったが、±3db のように対称ではなく、平均して信頼率 95 %で +5.80db、−3.87db、90 %で +4.80db、−3.25db となり下側寄りになった。

静特性と動特性のどちらも再現性の幅 6db より実例のシミュレーションで求めた幅が短くなることはなかったが、±3db のように対称ではなく、下側寄りになるという結果になった。

8 まとめ

静特性で 5 つ、動特性で 2 つのシミュレーションを行ったが、その実例に基づく SN 比の再現性の確認では信頼区間幅との関係が明らかになった。±3db の幅 6db に対して、ほとんどの実例で幅は 6db より長くなった。しかし、±3db のように対称になることはなく、こちらもほとんどの実例では下側寄りになり、約 +4〜5db、−2〜3db くらいという結果が多かった。
つまり、SN 比の再現性 ±3db は、幅に対しては問題はないが、対称性はないため ±3db がゆるい基準、特に信頼区間の下側で −3db より厳しくなる場合があるということが分かった。

9 おわりに

タグチメソッドにおける SN 比についての信頼区間を求める方法を導き、それを元に静特性と動特性の両方で信頼区間を求めるプログラムを作成し、いくつかの実験の結果を解析した。その結果を田口玄一氏の経験則による SN 比の再現性 ±3db と比較したところ幅に対しての問題はなかったが、対称性はなく SN 比の値が信頼区間の下側寄りになることが分かった。つまり、±3db がゆるい基準となる場合があるということが分かった。なので、緻密な議論が必要になってくる場合もある。また、経験則の ±3db で判断するのではなく、実際 SN 比の信頼区間を求めることにより、今後品質向上のさらなる飛躍が望めるだろう。

参考文献

[1] 堀井 里佳子：タグチメソッドの SN 比の統計的分布について.
2009 年度南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文，2010.

[2] かわにし:お気楽 RC!.
http://homepage3.nifty.com/kawanish/,2004 .

[3] 前廣 芳孝：2 重非心 F 分布の近似法の研究.
2010 年度南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文，2011.

[4] 宮川 雅巳：『品質を獲得する技術』. 日科技連,2000.

[5] 永田 靖：統計的手法における SN 比、第一回横幹連合総合シンポジウム,2006.

[6] 田口 玄一：技術開発のためのタグチメソッド.
日科技連,2004.

[7] 立林 和夫：『入門タグチメソッド』. 日科技連,2004.

[8] 立林 和夫：『タグチメソッド入門』.
日本経済新聞出社，2009.

[9] 鳥越 規夫: 2 重非心 F 分布のパーセント点の近似について,
http://www.kurims.kyoto−u.ac.jp/
~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0916-4.pdf,1997.