

# 両側ジャンプリスクを考慮した金融商品評価モデル —クレジットデリバティブを中心に—

M2009MM002 浅野礼士朗

指導教員：澤木勝茂

## 1 はじめに

1990年代後半以降、デリバティブ市場で最も発展をしたのはクレジットデリバティブの分野である。最もよく取引されているクレジットデリバティブは、クレジットデフォルトスワップ(CDS)である。CDSは、特定の企業のデフォルトリスクに対する保険を提供する。保険の買い手は対象企業がデフォルトした時、その債権を額面で購入することに同意している。売却できる債権の額面総額が、CDSの想定元本である。CDSの価格付けとは、あるプロテクションの購入者が定期的にプロテクションの売り手に支払うプレミアムを決めることである。CDSの価格付けにはデリバティブの評価でよく用いられるリスク中立確率測度を用いた方法が適用される。

カウンターパーティリスクとは取引の相手方の事情により取引が完結しないリスクのことである。最近の金融危機によりもたらされた大手金融機関の破綻により、カウンターパーティリスクが顕在化され欧米の金融機関や機関投資家、ヘッジファンドの大半は今後、CDSのカウンターパーティリスクが新たな金融市場混乱の火種になると予想している。以下にCDSに係る関係者を、

本研究では、カウンターパーティリスクを考慮したCDSの価格付け理論を取り上げる。従来研究として、企業の資産価値は幾何ブラウン運動に従うものと仮定し信用リスクを評価するモデルがある。その後、Lipton and Sepp[1]は企業の資産価値が単一方向のジャンプを持つ片側ジャンプ拡散過程に従うと仮定した。しかし、実際の市場における企業資産価値には突発的な上下変動が存在している。それにもかかわらず、企業資産価値の突発的な上昇、下落を同時に考慮したモデルは見受けられない。

そこで本研究では企業資産価値の変動を両側ジャンプリスクを考慮したジャンプ拡散過程で表現することにより、企業資産価値には突発的な上下変動を考慮したCDS評価モデルを構築することを目的とする。さらに、資産価値の変動が両側ジャンプ拡散過程に従うとした時の、カウンターパーティリスクを考慮したCDSの価格付け理論をモデル化し、モンテカルロシミュレーションを用いて数値的に導出する。さらに、全体の分散を一定とした時のジャンプ項の分散が占める割合、ならびに2資産間の価格変動の相関を変化させた場合のCDS価値への影響を分析する。

## 2 記号一覧

ここでは、以下で用いる記号を定義する。

- $r(t)$ : 無リスク利子率
- $a(t)$ : 資産価値
- $\varsigma(t)$ : 配当率

- $W(t)$ : 標準ブラウン過程
- $\sigma(t)$ : 資産のボラティリティ
- $\lambda(t)$ : ジャンプ出現強度
- $j$ : ジャンプ幅
- $\kappa$ : ジャンプコンベンセイター

## 3 片側ジャンプの下でカウンターパーティリスクを考慮しないCDSの評価

### 3.1 ジャンプ拡散過程

リスク中立測度  $\mathcal{Q}$  の下で、時刻  $t$  における企業資産価値  $a(t)$  をジャンプ拡散過程

$$da(t) = (r(t) - \varsigma(t) - \lambda(t)\kappa)a(t)dt + \sigma(t)a(t)dW(t) + (e^j - 1)a(t)dN(t) \quad (1)$$

に従うと仮定することで、片側ジャンプリスクを考慮した評価モデルを構築する。ただし、 $N(t)$  はジャンプ強度  $\lambda(t)$  を持つポアソン過程、 $j$  はパラメータを  $\nu$  とした確率密度

$$\bar{\omega}(j) = \begin{cases} \nu e^{\nu j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} \quad (2)$$

をもつ確率変数である。そのため式(1)における  $dN(t)$  の係数  $(e^j - 1)$  の期待値  $\kappa$  は、

$$\kappa = E[e^j - 1] = \frac{-1}{\nu + 1} \quad (3)$$

であり、 $E[d \ln a(t)] = (r(t) - \varsigma(t))dt$ 、 $Var[d \ln a(t)] = (\sigma^2 + \lambda)dt$  となる。

この時、プロテクションの買い手がプロテクションの売り手に支払うCDSプレミアム  $U^{(1)}$  は以下の微分積分方程式を満たす。

$$\partial_t U^{(1)}(t, x) + \mathcal{L}^{(1)} U^{(1)}(t, x) = \chi(t, x) \quad (4)$$

$$U^{(1)}(t, 0) = \phi_0(t), U^{(1)}(t, \infty) = \phi_\infty(t) \quad (5)$$

$$U^{(1)}(T, x) = 0 \quad (6)$$

ただし微積分作用素  $\mathcal{L}^{(1)}$  は

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_x^2 f(x) - \kappa \lambda \partial_x f(x) - \nu f(x) + \lambda Hf(x) \quad (7)$$

$$\nu = r + \lambda, \quad (8)$$

$$Hf(x) = \nu \int_{-x}^0 f(x+j)e^{\nu j} dj \quad (9)$$

であり

$$\chi(t, x) = \iota - (1 - \hat{R}_1)\lambda e^{-\nu x} \quad (10)$$

$$\phi_0(t) = (1 - R_1) \phi_\infty(t) = -\iota \int_t^T D(t, t') dt' \quad (11)$$

$$\hat{R}_1 = \nu R_1 \int_{-\infty}^0 e^{(1+\nu)j} dj = \frac{\nu R_1}{1 + \nu} \quad (12)$$

である．ここで  $\hat{R}_1$  は条件付き回収率であり，下側ジャンプの影響から  $\hat{R}_1 < R_1$  となる．

次に，この微積分方程式を解くためにグリーン関数  $G(t, x)$  を導入する．(4),(5),(6) の式が  $x$  の初期値を  $\xi$  として，

$$\partial_t G(t, x) + \mathcal{L}^{(1)\dagger} G(t, x) = 0 \quad (13)$$

$$G(t, 0) = 0, G(t, \infty) = 0 \quad (14)$$

$$G(0, x) = \delta(x_1 - \xi) \quad (15)$$

と簡単な形で表せる．ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(N)\dagger} = & \frac{1}{2} \sigma^2 \partial^2 f(x) - \kappa \lambda \partial f(x) - \nu f(x) \\ & + \sum_{\pi \in \Pi^{(N)}} \lambda_\pi H^\dagger f(x), \end{aligned} \quad (16)$$

$$H^\dagger f(x) = \nu \int_{-x}^0 f(x+j) e^{\nu j} dj \quad (17)$$

である．さらに  $G$  と  $U$  の関係は

$$\begin{aligned} U(0, \xi) = & \int_{R_+^{(1)}} \psi(x) G(T, x) dx + \int_0^T \phi_0(t, y) g(t, y) dt \\ & - \int_0^T \int_{R_+^{(1)}} \chi(t, x) G(t, x) dt dx \end{aligned} \quad (18)$$

$$g(t, y) = \partial_x G(t, 0) \quad (19)$$

与えられる．

次に，この微積分方程式をラプラス変換を用いて解く．式 (13),(14),(15) をラプラス変換  $G(t, \vec{x}) \rightarrow \hat{G}(p, \vec{x})$  して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_x^2 \hat{G} + \kappa \lambda \partial_x \hat{G} - (v+p) \hat{G} + \lambda \nu \int_0^\infty \hat{G}(p, x+j) e^{-\nu j} dj & = E[e^j] < \infty, E[a] < \infty \text{ を満足するため } \eta^+ < 1 \text{ とする.} \\ = -\delta(x - \xi) & \quad (20) \quad -\frac{1}{\eta^-} < \Phi < \frac{1}{\eta^+} \text{ のもとで} \end{aligned}$$

$$\hat{G}(p, 0) = 0, \hat{G}(p, \infty) = 0 \quad (21)$$

となり，これに対応する特性方程式は，Lipton and Sepp[1] により，

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2 + \kappa \lambda \psi - (v+p) - \frac{\lambda \nu}{\psi - \nu} = 0 \quad (22)$$

与えられる．この方程式は3つの実根を持ち， $-\psi_i, i = 1, 2, 3$  で表す．これより

$$\hat{G}(p, x_1) = \begin{cases} C_3 e^{-\psi_3(x-\xi)} & (x \geq \xi) \\ D_1 e^{\psi_1 \xi} [e^{-\psi_1 x} - e^{-\psi_3 x}] \\ + D_2 e^{\psi_2 \xi} [e^{-\psi_2 x} - e^{-\psi_3 x}] & (x < \xi) \end{cases}$$

を得る．ここで

$$D_1 = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{(\nu + \psi_1)}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} \quad (23)$$

$$D_2 = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{(\nu + \psi_2)}{(\psi_2 - \psi_1)(\psi_2 - \psi_3)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & \frac{2}{\sigma^2} \frac{(e^{(\psi_1 - \psi_3)\xi} - 1)(\nu + \psi_1)}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} \\ & + \frac{2}{\sigma^2} \frac{(e^{(\psi_2 - \psi_3)\xi} - 1)(\nu + \psi_2)}{(\psi_2 - \psi_1)(\psi_2 - \psi_3)} \end{aligned} \quad (25)$$

のように解析的に導出される．ただし，この値はラプラス変換されている為，ラプラス変換の数値逆変換が必要となる．これを行おこなうため，以下のGaver-Stehfestアルゴリズムを用いて，

$$G(t, x_1) = \frac{\ln 2}{t} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \times \sum_{k=1}^N (-1)^k C_k \hat{G}(k \frac{\ln 2}{t}, x_1)$$

のように近似できる．

## 4 両側ジャンプの下でカウンターパーティリスクを考慮しないCDSの評価

### 4.1 両側指数分布

本研究では，リスク中立測度  $Q$  の下で，時刻  $t$  における企業資産価値  $a(t)$  を Lipton and Sepp と同様，式 (1) に従うとする．ただし，本研究でのジャンプ幅  $j$  は定義関数  $I$  を用いて確率密度

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(j) = & \bar{\omega}^+(j) + \bar{\omega}^-(j) \\ = & q^- \frac{1}{\eta^-} e^{\frac{1}{\eta^-} j} I_{\{j < 0\}} + q^+ \frac{1}{\eta^+} e^{-\frac{1}{\eta^+} j} I_{\{j \geq 0\}} \end{aligned} \quad (26)$$

をもち，パラメータ  $\eta^+, \eta^-$  の両側指数分布に従う確率変数である． $q^+, q^-$  はそれぞれ正，負のジャンプの発生確率を表しており， $q^+, q^- \geq 0, q^+ + q^- = 1$  を満たす．また  $-\frac{1}{\eta^-} < \Phi < \frac{1}{\eta^+}$  のもとで

$$\begin{aligned} E[e^{\Phi j}] = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi j} \bar{\omega}(j) dj \quad (27) \\ = & \frac{q^+}{1 - \Phi \eta^+} + \frac{q^-}{1 + \Phi \eta^-} \end{aligned}$$

となるため， $e^j - 1$  の期待値  $\kappa$  は

$$\kappa = E[e^j - 1] = \frac{q^+}{1 - \eta^+} + \frac{q^-}{1 + \eta^-} - 1 \quad (28)$$

となる。

このような確率過程を仮定し、両側ジャンプリスクを考慮した評価モデルを構築する。

#### 4.2 ラプラス変換を用いた解法

(22) 式に対応する特性方程式は Sepp[3] により

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2\psi^2 + \kappa_1\lambda_1\psi - (v+p) - \lambda_1\left[\frac{q^+}{1-\eta^+\psi} + \frac{q^-}{1-\eta^-\psi}\right] = 0 \quad (29)$$

である。この方程式は 4 つの実根を持つ。それぞれを  $-\psi_i, i = 0, 1, 2, 3$  と表され、

$$-\infty < \psi_3 < -\frac{1}{\eta^-} < \psi_2 < 0 < \psi_1 < \frac{1}{\eta^+} < \psi_0 < \infty$$

を満たす。

(29) 式の両辺に  $(1 - \eta^+\psi)(1 + \eta^-\psi)$  を掛けて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_1^2\eta^-\eta^+\psi^4 + (\kappa_1\lambda_1\eta^-\eta^+ - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\eta^- - \eta^+))\psi^3 \\ & - (\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \kappa_1\lambda_1(\eta^- - \eta^+) + (v+p)\eta^-\eta^+)\psi^2 \\ & + (-\kappa_1\lambda_1 + (v+p)(\eta^- - \eta^+) - \lambda_1(q^+\eta^- - q^-\eta^+))\psi \\ & + (v+p) = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

を得る。よって解は、

$$\hat{G}(p, x_1) = \begin{cases} C_0e^{-\psi_0x_1} + C_1e^{-\psi_1x_1} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{\zeta+p} - \frac{1}{r+p}\right] & (x_1 < \xi_1) \\ C_2e^{-\psi_2x_1} + C_3e^{-\psi_3x_1} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{\zeta+p} - \frac{1}{r+p}\right] & (x_1 \geq \xi_1) \end{cases}$$

となり、 $C_0, C_1, C_2, C_3$  は次の式を満たす。

$$C_0 + C_1 - C_2 - C_3 = \frac{1}{\zeta+p} - \frac{1}{r+p} \quad (31)$$

$$\psi_0C_0 + \psi_1C_1 - \psi_2C_2 - \psi_3C_3 = \frac{1}{\zeta+p} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi_0\eta^- + 1}C_0 + \frac{1}{\psi_1\eta^- + 1}C_1 - \frac{1}{\psi_2\eta^- + 1}C_2 \\ & - \frac{1}{\psi_3\eta^- + 1}C_3 = \frac{1}{(\zeta+p)(\eta^- + 1)} - \frac{1}{r+p} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi_0\eta^+ + 1}C_0 + \frac{1}{\psi_1\eta^+ + 1}C_1 - \frac{1}{\psi_2\eta^+ + 1}C_2 \\ & - \frac{1}{\psi_3\eta^+ + 1}C_3 = \frac{1}{(\zeta+p)(\eta^+ - 1)} + \frac{1}{r+p} \quad (34) \end{aligned}$$

$\zeta = 0.32, p = 0.1, \sigma = 0.1, \eta^+ = 0.13, \eta^- = 0.14$  とした時の  $\hat{G}(p, x_1)$  と  $x$  の関係を以下に示す。

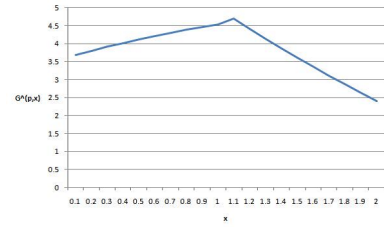


図 1  $\hat{G}(p, x_1)$

## 5 カウンターパーティリスクを考慮した CDS の評価

### 5.1 ジャンプ拡散過程

対象企業が複数の場合を考える。各企業 ( $i = 1, 2$ ) の資産価値の変動は 1 企業の場合と同じくジャンプ拡散過程

$$\begin{aligned} da_i(t) = & (r(t) - \zeta_i(t) - \lambda_i(t)\kappa_i)a_i(t)dt \\ & + \sigma_i(t)a_i(t)dW_i(t) + (e^{j_i} - 1)a_i(t)dN_i(t) \end{aligned}$$

に従うと仮定する。ここで

$$\kappa = E[e^{j_i} - 1] = \frac{q_i^+}{1 - \eta_i^+} + \frac{q_i^-}{1 + \eta_i^-} - 1 \quad (35)$$

であり、企業 1 と 2 の拡散項は以下のように、相関係数によって関連付けられている。

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho_{12}(t)dt \quad (36)$$

ここでは、ジャンプ項については、Marshall and Olkin[2] のアイデアを参考にする。 $\Pi^{(M)}$  を空集合を除いた  $M$  の部分集合族とし、 $\pi$  をその要素とする。これらの  $\pi$  を用いた密度  $\lambda_\pi(t)$  を持つポアソン過程  $N_\pi(t)$  から、 $N_i(t)$  を以下のように定義する。

$$N_i(t) = \sum_{\pi \in \Pi^{(M)}} I_{i \in \pi} N_\pi(t) \quad (37)$$

$$\eta_i^+(t) = \sum_{\pi \in \Pi^{(M)}} I_{i \in \pi} \eta_i^+ \pi(t) \quad (38)$$

$$\eta_i^-(t) = \sum_{\pi \in \Pi^{(M)}} I_{i \in \pi} \eta_i^- \pi(t) \quad (39)$$

## 6 シミュレーション

### 6.1 商品の説明

本研究での CDS ではカウンターパーティリスクを考慮し、プロテクションの売り手が破綻した場合、その後クレジットイベントが発生しても決済のための金額が相手方に支払われないものとする。

CDS はスワップ契約であるため、価格は常に 0 である。よってデフォルト発生時にプロテクションの買い手が受け取る金額の割引現在価値の期待値が、支払う CDS プレミアムの割引現在価値の期待値と一致する。ここで求め

るべきは CDS プレミアムであり、プロテクションの買い手のデフォルト時刻を  $\tau_b$ 、プロテクションの買い手、売り手の資産価値を  $S_b, S_s$  とした時、CDS プレミアム  $U$  は

$$E[e^{-r\tau_b} KI_{\{S_s > 0\}}] = E[\sum_{i=1}^{\tau_b} e^{-ri} I_{\{S_s > 0\}} U] \quad (40)$$

を満たす。このような CDS プレミアムを、モンテカルロ・シミュレーションを用いて計算していく。具体的には、ジャンプ項の分散を  $\sigma_j^2$  として  $Var[\partial \ln V(t)]/\partial t = \sigma^2 + \sigma_j^2$  を一定とした時の、それに対するジャンプ項の分散  $\sigma_j^2$  が占める割合  $v = \sigma_j^2 / (\sigma^2 + \sigma_j^2)$  の変化が CDS プレミアムに与える影響を分析する。また、2 企業間の資産価値変動の相関が変化したときの CDS プレミアムへの影響を調べていく。

数値実験で使う基本パラメータは  $r = 0.01, \sigma = 0.2, p^+ = 0.5, p^- = 0.5, \eta^+ = 10, \eta^- = 10, \rho = 0.1, T = 1$  とする。

## 6.2 全体の分散に対するジャンプ項の分散の割合と CDS プレミアム

全体の分散に対するジャンプ項の分散の割合が変化したときの CDS プレミアムの変化は以下ようになる。

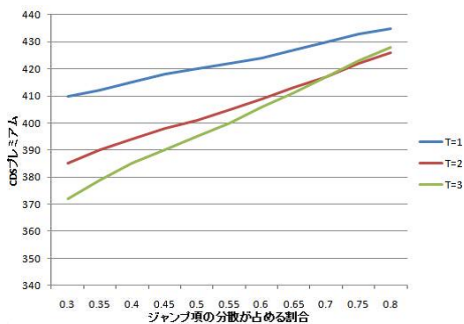


図 2 ジャンプ項の分散に対する CDS プレミアム

図 2 では、全体の分散に対するジャンプ項の分散の割合が変化したときの CDS プレミアムの変化を計算した。ジャンプ項の分散の割合が多ければ多いほど、大きなジャンプをする確率が高まる。それに伴い対象企業がデフォルトしてしまう可能性が高まり、CDS プレミアムは上昇する。

また、この計算を満期 ( $T = 1, 2, 3$ ) を変化させおこなった。満期までの期間が短いほど、全体の分散に対するジャンプ項の分散の割合が変化したときの CDS プレミアムの変化が急であることがわかる。満期までの期間が短い場合、仮に上側方向への大きな資産価値の上昇が生じた時には、満期までの間、ジャンプの起こる可能性が低いのでデフォルト境界まで企業の資産価値が下落するケースは考えにくく、多くがそのまま満期を迎える。逆に満期までの期間が長い場合は、仮に上側方向への大きな資産価値の上昇が生じたとしても、満期までの間に逆方向への大きなジャンプが起こる可能性が多く残されている

ため、後に企業の資産価値がデフォルト境界を超えてしまう可能性が十分に残されている。

## 6.3 相関係数の変化に対する CDS プレミアム

2 企業間の資産価値変動の相関が変化したときの CDS プレミアムの変化は以下ようになる。

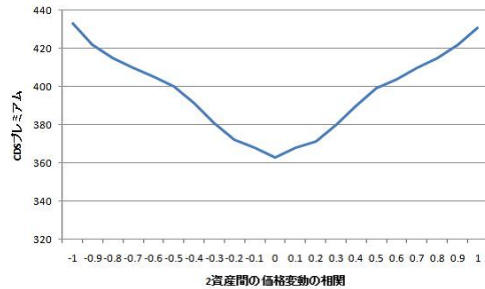


図 3 相関係数の変化に対する CDS 価格

図 3 では、2 企業間の資産価値変動の相関が変化したときの CDS プレミアムの変化を計算した。 $\rho = 0$  を境に折れ曲がった様なグラフである。やはり  $\rho$  の絶対値が大きいくほど、対応する企業の資産価値の突発的に起こる大きな変化につられ自身の資産価値も大きく崩れてしまう。それに伴いデフォルトしてしまう可能性が高まり、CDS プレミアムも高くなる。

## 7 おわりに

本研究では企業資産価値を両側ジャンプ拡散過程で表現し、突発的な変動を考慮した CDS プレミアムを、カウンターパーティリスクを考慮しない場合は導出することで評価し、カウンターパーティリスクを考慮する場合はモンテカルロシミュレーションを用いることで数値的に解を導出し評価した。しかし実際には対象企業が複数あるバスケット型と呼ばれる CDS も存在する。今後はこのようなバスケット型の CDS の評価モデルの構築、それについてシミュレーション結果との比較、市場価格を用いた検証をしていきたい。

## 参考文献

- [1] A. Lipton and A. Sepp : “ Credit value adjustment for credit default swaps via the structural default model,” *The Journal of Credit Risk*, Vol.5, Num.2, pp.123-146, 2009.
- [2] Marshall, A.W., and Olkin, I : “ A multivariate exponential distribution,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol.2, pp.84-98, 1967.
- [3] A. Sepp : “ Analytical pricing of double-barrier options under a double- exponential jump diffusion process : Applications of Laplace Transform,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.7, Num.2, pp.151-175, 2004.