

修正繰り返し制御を用いたボールバランサの制御 ～ポアンカレ写像に基づく収束性の検証と設計～

M2010MM041 竹内 稔人

指導教員：高見 勲

1 はじめに

産業用ロボットマニピュレータや工作機械等のシステムでは、あらかじめ与えられた一定動作を繰り返し行う場合が多くみられる。その際、高精度な追従動作が要求され、その精度に対する要求は年々厳しくなっている[1]。システムがあらかじめ与えられた一定動作を繰り返し行う場合に有効な制御方式の一つとして、繰り返し制御が注目されている。繰り返し制御が導入されたきっかけは、高エネルギー物理学研究所の陽子シンクロトン主リング電源系での電磁石電流の制御である[2][3]。陽子を加速するためにはあらかじめ決められた電流パターンに対して 10^{-4} の精度で追従することが要求される。

繰り返し制御とは、周期関数を目標軌道とするサーボ系であり、定常偏差が零となるように、一周期前の追従偏差と制御入力を用いて現時刻の制御入力を修正する制御方式である。しかし、一般に制御対象が厳密にプロパーならば、繰り返し制御系は安定化できないことがわかっている。そこでローパスフィルタを導入し、高周波成分の偏差を許容するかわりに、厳密にプロパーな制御対象に対しても安定な制御系を構成できる修正繰り返し制御系が提案された。しかし、修正繰り返し制御系を構成すると厳密にプロパーな制御対象に対して収束性を示すことはできない。

本研究では、2自由度ボールバランサを制御対象とし、ポアンカレ写像に基づき実験的に偏差が漸近的に収束するか検証する。ポアンカレ写像とは周期的なシステムに摂動を加え、1周期後どのような摂動になるかを示す写像である。繰り返し制御と関連性が高いと考え、ポアンカレ写像を用いて収束性を検討する。

具体的な構成方法は、修正繰り返し制御系の安定条件が最適レギュレータの円条件と密接に関連している点に着目し、漸的に安定化させる設計法で安定化補償器を設計し、2自由度ボールバランサに対しての修正繰り返し制御を適用する。また、2自由度ボールバランサにポアンカレ写像を導入するためにプレート上で周期的な動作をさせ、それに摂動を加えることでポアンカレ写像の固有値の絶対値の最大値を見る。このポアンカレ写像により、収束性を検討する。

また、修正繰り返し制御系がローパスフィルタを用いて構成されているため高周波領域の目標値追従特性が劣化する。その問題を解決するためフィードフォワード項を付加し、目標値までの収束を速くし追従特性を向上させた。フィードフォワード項の設計をポアンカレ写像に基づいて設計し、実験を行う。

2 制御対象

2自由度ボールバランサは、2つのモータを駆動させてその上に配置されたプレートを前後左右に動かし、ボールを所望の位置に移動させることができる実験機である。この実験機の特徴としてプレートの上に CCD カメラが搭載されており、ボールの位置情報を検知して制御を実現するビジュアルフィードバックシステムを備えている実験機である。ボールの重心位置を x [m]、プレートの一辺の長さを L_p [m]、ロードギアの仰角を $\theta_{l,x}$ [rad]、レバーアームとロードギアのオフセットを r_{arm} [m] として 2 自由度ボールバランサの x 軸方向の概略図とギヤトレインの概略図を図 1 に示す。

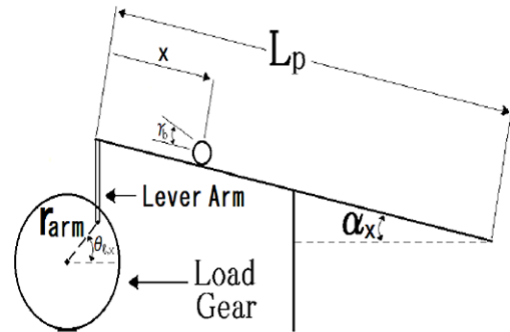


図 1 2 自由度ボールバランサの x 軸方向の概略図

3 モデリング

修正繰り返し制御系の安定化補償器を設計するために、システムを線形化しモデリングを行った。

状態空間表現を

$$\begin{cases} \dot{z}_x(t) = Az_x(t) + Bu_x(t) \\ y_x(t) = Cz_x(t) \end{cases} \quad (1)$$

とする。ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6r_{arm}g}{5L_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{A_m}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

状態量を $z_x(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) & \theta_{l,x}(t) & \dot{\theta}_{l,x}(t) \end{bmatrix}^T$, 制御量を $y_x(t) = x(t)$, 操作量をモータ電圧 $u_x(t) = V_{m,x}(t)$ と

する。なお、 y 軸に関する状態空間表現もプレートが正方形であるため同様に表すことができる。 $R_m[m]$ はモータ抵抗、 $g[m/s^2]$ は重力加速度、 $A_m[Nm/A]$ はアクチュエータゲイン、 $B_{eq}[kg \cdot m^2/s]$ は等価粘性摩擦係数、 $J_{eq}[kg \cdot m^2]$ は総合慣性モーメントを表す。

4 修正繰り返し制御の安定条件

状態空間表現、式 (1) に対して、内部モデル $\frac{1}{1-F(s)e^{-Ls}}I$ を組み込んだ修正繰り返し制御系を考える。図 2 の制御系において、 $R(s), Y(s), E(s), V(s)$ はそれぞれ目標入力、出力、偏差、繰り返し補償器のラプラス変換である。また $G(s)$ はプラント $P(s)$ と安定化補償器 $C(s)$ を直列結合した系の伝達関数である。このシステムに対して $G(s), e^{-Ls}$ の初期状態を 0 とした時、

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3)$$

$$V(s) = \frac{1}{1 - F(s)e^{-Ls}} E(s) \quad (4)$$

$$Y(s) = G(s)V(s) \quad (5)$$

の関係が成り立つ。計算から

$$E(s) = e^{-Ls}F(s)(I + G(s))^{-1}E(s) + D_e(s) \quad (6)$$

$$D_e(s) \triangleq (I + G(s))^{-1}(1 - F(s)e^{-Ls})R(s) \quad (7)$$

を得る。入出力安定条件により、図 2 の修正繰り返し制御系の安定条件が求まる。すなわち式 (6) にスモールゲイン定理を適用すると、安定となるための十分条件は

$$\| e^{-Ls}F(s)(I + G(s))^{-1} \|_{\infty} < 1 \quad (8)$$

となる。ここで任意の ω に対して $|e^{-Lj\omega}| = 1$ だから式 (8) が成り立つ時、

$$\| F(s)(I + G(s))^{-1} \|_{\infty} < 1 \quad (9)$$

が成立する。ただし、 $\| \cdot \|_{\infty}$ は H_{∞} -ノルム、 $\sigma_{max}(M)$ は行列 M の最大特異値を表す。

条件 1 $[I + G(s)]^{-1}G(s)$ は安定な有理関数行列。

条件 2 $\| F(s)(I + G(s))^{-1} \|_{\infty} < 1$ 。

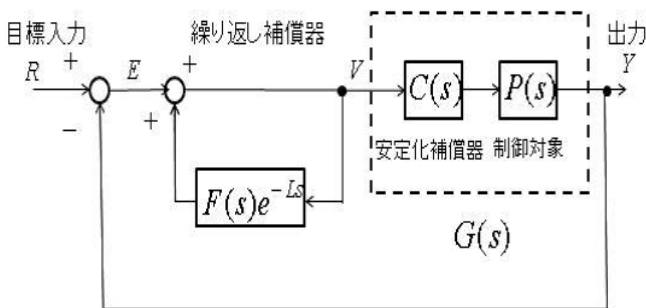


図 2 修正繰り返し制御のシステム

5 修正繰り返し制御系の設計

本節では、4 節の条件をもとに、修正繰り返し制御系の設計を考える。次の step で制御系の設計を行った。

step1: $| (I + G(j\omega))^{-1} |$ が追従帯域 $\Omega_t := \{ \omega : \omega \leq \omega_t \}$ で 1 より小さくなるように、すなわち

$$| I + G(j\omega) | > 1 : \forall \omega \in \Omega_t \quad (10)$$

となるように補償器 $C(s)$ を決定する。

step2: $| I + G(j\omega) |$ をボード線図にプロットし $| F(j\omega) |$ がそれより下になるように、すなわち

$$| I + G(j\omega) | > | F(j\omega) | : \forall \omega \in \Omega_t \quad (11)$$

と満たすように $F(s)$ を定める。

5.1 補償器 $C(s)$ の設計

制御対象 $P(s)$ の最小実現を求める。すなわち、

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (12)$$

補償器 $C(s)$ を構成し、そのゲイン H と K を次式のように定める。

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_x(t) = (A - HC)\hat{z}_x(t) - Bu_x(t) + Hv_x(t) \\ u_x(t) = -K\hat{z}_x(t) \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $u_x(t), v_x(t)$ はそれぞれ $C(s)$ への入力、 $C(s)$ への出力、 K は状態フィードバックゲイン、 H はカルマンフィルタゲインである。

1 Φ を $(\Phi^{1/2}, A)$ が可制御対となるような適当な半正定対称行列とし、Riccati 方程式

$$A\Sigma + \Sigma A^T + \Phi - \Sigma C^T C \Sigma = 0 \quad (14)$$

の唯一の正定対称解を Σ とするとき、

$$H = \Sigma C^T \quad (15)$$

と定める。

2 K は、2 次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (y(t)^T Q y(t) + u(t)^T u(t)) dt \quad (16)$$

を最小にする状態フィードバックゲインを K とする。ただし、 Q は正定対称行列である。

$$K = B^T P \quad (17)$$

ただし、 P は Riccati 方程式

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (18)$$

の唯一の正定対称解である。

与えられた追従帯域 Ω_t で式 (10) を満たす十分大きな K を選ぶ。ボード線図にプロットし、安定化補償器を決定する。

5.2 2自由度ボールバランサに対する制御系設計

5節に基づいた設計で制御設計を行う。

- 1 $\Phi = \text{diag}[5 \ 20 \ 10 \ 90]$ と置いて、式 (14) よりゲイン H を求める。

$$H = \begin{bmatrix} 4.44 & 7.38 & 3.57 & 0.0238 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

- 2 $Q = \text{diag}[100 \ 10 \ 20 \ 0]$, $R = 1$ と置いて、式 (18) より、ゲイン K を求める。

$$K = \begin{bmatrix} 10.0 & 10.6 & 5.56 & 0.377 \end{bmatrix} \quad (20)$$

5節のstep2より、 $F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$, $\tau = 0.2$ として $|1+G(j\omega)|$ と $|F(j\omega)|$ をボード線図にプロットする。図3より、 $|1+G(s)|$ が $F(s)$ より、上側にあるため安定である。補償器 $C(s)$ が構成された。

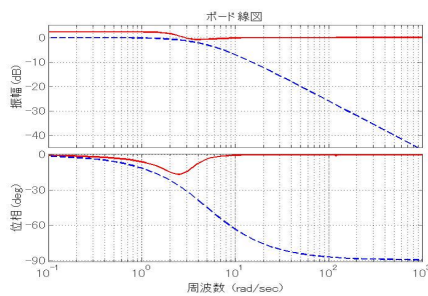


図3 $|1+G(j\omega)|$ と $|F(j\omega)|$ のボード線図

6 シミュレーション

本節では、5節で構成した補償器 $C(s)$ とローパスフィルタ $F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$, $\tau = 0.2$ をもとに円を描かせるシミュレーションを行う。周期 $L = 10$, $\omega = \frac{2\pi}{L}$, x 軸方向に対する目標値 $x = 0.1 \sin(\omega t)$, y 軸方向に対する目標値 $y = 0.1 \cos(\omega t)$ とし、200[s]で行った。図4より、若干のオーバーシュートがあるが円の軌跡に追従していることがわかる。

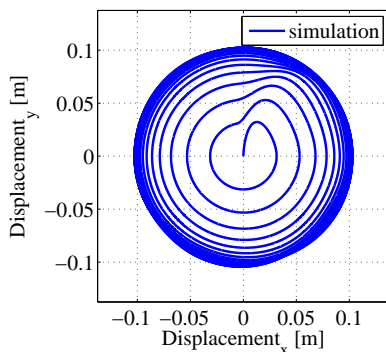


図4 円を描くシミュレーション

7 ポアンカレ写像に基づく収束性の検証

本節では、ポアンカレ写像の観点から、修正繰り返し制御系が目標値に収束しているか検証する。ポアンカレ写像を考える利点は、連続時間の収束性を離散時間の収束性に置き換えられることであり、このことにより、周期解の性質が容易になる場合が多い。周期的な目標入力を与えることで収束性を検証した。

7.1 ポアンカレ写像の定義

ポアンカレ写像とは、周期的なシステムにおいて、周期的な状態に加えた摂動が1周期後にどのような摂動に発展するかを示す写像であり、ポアンカレ断面という周期軌道上の超曲面 Π を用いて、1次元小さい局所断面上の状態空間で考えることができる。また、摂動が十分小さければポアンカレ写像は線形と考えることができ、ポアンカレ写像の固有値の絶対値がすべて1より小さければ安定で、0に近ければ収束性が向上する [4][5]。

したがって、安定性の指標としてポアンカレ写像の固有値の絶対値の最大値を使うことができ、以下これを λ_{max} と書く。

7.2 ポアンカレ写像の計算法

ここでは、数値シミュレーションで求めるポアンカレ写像について説明する。以下にポアンカレ写像の関係式を表す。

$$\Delta z_{xk+1} = T \Delta z_{xk} \quad (21)$$

ここで、この T が線形近似したポアンカレ写像であり、 Δz_{xk} は摂動を表し、 Δz_{xk+1} は1周期後の状態からポアンカレ断面に到達する値を引いたものとする。 T を数値シミュレーションによって計算し、これにより、ポアンカレ写像の安定性を検討する。ポアンカレ断面 Π を以下の式で定義する：

$$\Pi = \{z_x \in R^4, z_y \in R^4 | x = 0, y > 0\} \quad (22)$$

とし、1次元少ない3次元の状態空間で考えることができる。 T を数値計算によって計算し、これにより、ポアンカレ写像の収束性を検証する。

このポアンカレ写像を数値シミュレーションに基づいて導出する方法について説明する。まず、初期値 $z_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ から始めてシミュレーションを行い、1周期後のポアンカレ断面に到達する値を二分法で導出する。これを周期解とし、この値に $x(t)$ を除き摂動を与え、1周期後のポアンカレ断面に到達する値を観測し周期解との差をとり、3次元の状態空間で T の要素を1列ごとに求める。例えば、 $\Delta z_{xk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ と摂動を与えれば、式 (21) より、 T の第1列が求められる。同様のことを $\Delta z_{xk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ について行えば、 T の第2列が得られ、以下同様にして第3列も計算して T 全体を得る。シミュレーションを3回実行し、それによって得られた縦ベクトルを並べて T を構成できることになる。

本研究では、プレート上に円を描かせることによってポアンカレ断面に到達する値を求め、 T の λ_{max} を求めて収束性の検証を行った。

7.3 ポアンカレ写像による収束性の検証

7.2 節で求めた計算結果を示す。パラメータは 5.2 節で求めた値を使用した。 T は次のようになった。

$$T = \begin{bmatrix} -0.051 & -0.087 & -0.036 \\ -0.27 & -0.46 & -0.19 \\ -0.27 & -0.45 & -0.19 \end{bmatrix} \quad (23)$$

となり、固有値の最大値の絶対値 $\lambda_{max} = 0.70$ であり、1 以内に収まっていることがわかり、収束することがわかる。

8 ポアンカレ写像に基づく制御系設計

図 5 のように修正繰返しコントローラにフィードフォワード項を K_p とし付加し、ポアンカレ写像に基づいてフィードフォワード項 K_p を設計する。5 節のパラメータを使用し、 K_p を変化させた。

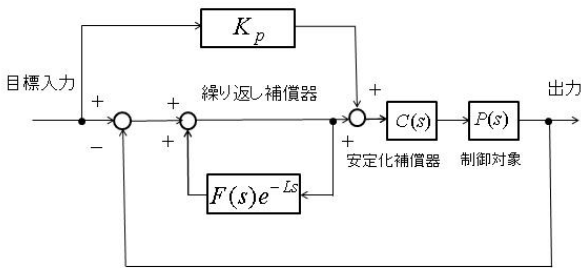


図 5 K_p を付加した制御系

$K_p = 1$ のとき

$$T = \begin{bmatrix} 0.84 & 1.4 & 0.59 \\ -0.27 & -0.46 & -0.20 \\ -0.67 & -1.1 & -0.48 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$\lambda_{max} = 0.12$ となり、7.3 節のフィードフォワードを付加しない場合に比べ収束性が向上している。このように K_p を変化させてポアンカレ写像に基づいて K_p を設計する。 K_p を 1 から 2 まで 0.1 ずつ変化させた。図 6 より $K_p = 1.2$

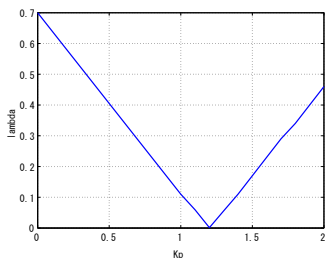


図 6 K_p を変化させたグラフ

の時、 $\lambda_{max} = 0.0013$ となり収束性が高いことがわかる。40[s]、シミュレーションを行うことにより効果を確認し

た。図 7、図 8 を比較すると図 8 の方が収束が速くなっていることがわかる。

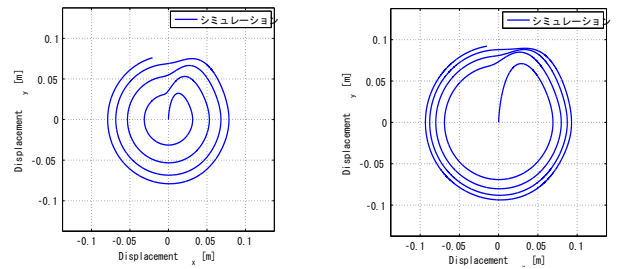


図 7 $K_p = 0$ の時のシミュレーション
図 8 $K_p = 1.2$ の時のシミュレーション

9 実験

この節では、8 節で設計したコントローラとフィードフォワードを用いたコントローラで実験を行い、シミュレーションと比較を行う。実験はボールをプレートの中心に置いてから、スタートすることにした。時間は、100[s]で行った。図 9 と図 10 を比較すると図 10 の方が目標値追従性能が向上していることがわかる。

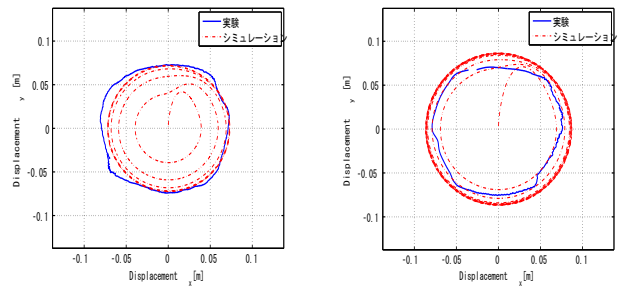


図 9 $K_p = 0$

図 10 $K_p = 1.2$

10 おわりに

修正繰返し制御を 2 自由度ボールバランサに適用し、シミュレーションを行いポアンカレ写像の固有値の絶対値の最大値 λ_{max} に基づいて、収束性を示すことができた。また、ポアンカレ写像に基づきフィードフォワード項 K_p を決め、シミュレーションと実験で効果を確認した。

参考文献

- [1] 中野, 井上, 山本: 繰返し制御, 計測自動制御学会, 1989.
- [2] 塩田: 連続時間修正繰返し制御系の設計に関する研究, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文, 1997.
- [3] 山田, 佐藤, 小和田: 目標値追従特性を指定した修正繰返し補償器の一設計法, 日本 AEM 学会誌, Vol.15, No. 2, 118/124, 2007.
- [4] 野口: 歩行安定性に対する円弧脚形状の効果-線形化ポアンカレ写像に基づく検討-, 奈良先端科学技術大学院大学修士論文, 2008.
- [5] 川上: 非線形現象入門, 2005.