オプション価格付けのための確率ボラティリティモデルの有用性に関する研究

M2011MM058 佐野正和
指導教員：石崎文雄

1 はじめに

現在，金融市場では金融派生商品（デリバティブ）は重要な役割を果たしている．それに伴い，金融派生商品の一種であるオプションの価格付けに関する研究が盛んに行われている．オプションの価格付けに関する最も基本的な研究課題は次のようなものである．まず原資産の価格過程と呼ばれる確率過程 $\{X(t)\}$ $(0 \leq t \leq T)$ があり，そのランダムな動きの結果に依存して最終時点 $(t = T)$ でのその価格が定まるようなオプションがある．このとき,「現時点 t でのこのオプションの価格はどのように定まるか？」という問いが基本的な課題である [1, 2].
この問いに対して回答を与えることが，オプション価格理論の基本的な課題である．オプション価格理論に対する古典的かつ標準的な回答の一つとして Black-Scholes の理論がある．Black-Scholes によるオプション価格理論は,「原資産の価格過程が幾何 Brown 運動で記述できるという仮説のもと，オプション価格は，そのオプションの収益の同値 matingale 測度についての期待値として与えられる」という理論である．ヨーロッパ型オプションの場合に関して，その理論価格を得るための Black-Scholes の公式 (BS 式) と呼ばれる計算式が導出されており広く使われている．BS 式は，標準正規分布の分布関数を含む単純な式で，計算も容易で，市場から入手可能なデータで計算できる．このような利点から，実務で広く使われている．しかしながら問題点として，

1. 取引費用を無視していること
2. ヒストリカル・ボラティリティとインプライド・ボラティリティとの乖離があること
3. 収益率の分布が一般的に持っているとされる非対称性およびヘビーテイルの性質を持っていないこと
4. 完備市場モデルであるが，実際の市場は非完備市場であると見る方が現実的であることなど知られている問題点が多く存在すること

その問題を克服するため，現在，原資産価格過程のモデルとして幾何 Brown 運動よりも，現実の原資産価格の挙動をより適切に反映し，かつ，オプション理論価格が数値計算可能である確率過程モデルの研究が現在盛んに行われている．その中で，本研究では確率ボラティリティモデルと呼ばれるクラスに注目し，そのモデルの有用性を調査する．今回，クラスは Heston モデル [3](以後 HES と記す) と Hestonjump モデル [4, 5](以後 HESJ と記す) を使う．そのクラスの有用性の調査を行うために，日経 225 オプションを対象として行う．しかしながら日経 225 オプションは海外市場に比べて取り引きが少ない，そこでプットコールパリティを用いる．プットコールパリティとは，同一の行使価格 K，満期 T の時刻 t における価格 C のコールオプションと価格 P のプットオプションの関係式は無裁定条件より次の式 $C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$ がなりたつ事がいえる．なお S は原資産価格を表し，r は金利を表す．この関係式から実際に取り引きが行われなかったデータから仮想のデータを算出する．オプション価格は実用的な計算時間で容易に計算できる理論として特性関数と FFT を利用した方法を用いる [6, 7, 8]．次にキャリブレーションから求められたパラメータで前日のパラメータを用いて，次の日のデータからモデル価格を計算し市場価格との誤差を計算し，当日のパラメータから求められたモデル価格と市場価格の誤差と比較し前日のパラメータでも誤差を抑える事が可能かを調査し確率ボラティリティモデルの有用性の検証をする．

2 オプション理論価格計算方法

特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法は大まかに言えば, 以下で示される原理に基づいた方法である [6].

1. オプション理論価格を，それぞれ cash-or-nothing オプションと asset-or-nothing オプションと関連付けられる 2 つの確率測度を使って表現する [7]．この 2 つの確率測度は，それぞれ money-market-adjusted 確率測度，stock-adjusted 確率測度とも呼ばれる [8].
2. 得られたオプション理論価格を対数権利行使価格の関数と見て，Fourier 変換を行い，その Fourier 変換 (簡単のため以後，オプション価格 Fourier 変換と呼ぶことにする) と原資産の価格過程の基礎となる分布の特性関数 (簡単のため以後，原資産価格過程特性関数と呼ぶことにする) を関連付ける解析的な式を確立する．
3. 確立した解析的な式から，オプション価格 Fourier 変換を原資産価格過程特性関数を含む式で表し，それを Fourier 逆変換することでオプション価格を得る．
4. この最後の Fourier 逆変換する部分で FFT を使用することで，オプション理論価格が実用的な計算時間で計算できる．

この特性関数と FFT を利用した方法により計算が容易になる理由は，原資産の価格過程に関する分布が解析的に扱いやすい形を持たない場合でも，その特性関数は比較的解析的に取り扱いやすい形になっていることが多いからである．

3 モデル

本研究では，確率ボラティリティモデルである HES モデル，HESJ モデルにおけるオプション価格を特性関数

と FFT を利用して考える．まず HES モデルを以下のように定義できる [3, 8]．HES モデルにおいては，原資産価格過程 $\{S(t)\}$ は，現実の確率測度のもとで

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW_s(t) \qquad (1)$$

と仮定される．ここで，瞬時分散 (instantaneous variance) $V(t) = \sigma^2(t)$ であり，次の確率微分方程式

$$dV(t) = \alpha(\bar{V} - V(t))dt + \beta\sqrt{V(t)}dW_v(t) \qquad (2)$$

を満たす．ここで，2 つのウィーナー過程 dW_s と dW_v は，

$$\mathrm{corr}(dW_s(t), dW_v(t)) = \rho dt \qquad (3)$$

のように相関を持つと仮定される．式 (2) は瞬時分散 V が平均復帰力 (mean-reversion force) α，分散係数 (dispersion coefficient)β と，長期的分散 $\bar{V}$ によって記述されることを示している．このモデルでは，$V(0)$，α，$\bar{V}$ がすべて正の場合は，$V(t)$ は決して負にならない．また，$2\alpha\bar{V}/\beta^2 \geq 1$ の場合 $V(t)$ は常に正であることを示すことができる．

負の相関パラメータ ρ は負の歪度 (skewness) を生成する. 一方，パラメータ β で測られる確率的ボラティリティが与える影響は収益分布の尖度 (kurtosis) を増加させる事である．

また別の方法として，原資産価格過程に jump プロセスを組込むことが考えられる．拡散過程では，満期まで 2，3 日しかない out of the money のオプションの市場価格をうまく説明できない．原資産価格過程に jump プロセスを組込むことで，市場価格ボラティリティと確率的ボラティリティモデルによって返される価格ボラティリティとの間の不一致を解消出来るかもしれない.

HES モデルにジャンプ過程を含む HESJ モデルは，一定頻度 λ で正規分布するジャンプが発生することを前提としている．結果的に得られるモデルは，以下の確率微分方程式の組で記載される [4, 5]．

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_s(t) + J(t)dq(t) \qquad (4)$$

$$dV(t) = \alpha(\bar{V} - V(t))dt + \beta\sqrt{V(t)}dW_v(t) \qquad (5)$$

ここに，$dq(t)$ は，確率 $1 - \lambda dt$ で 0(ジャンプなし)，確率 λdt で 1(ジャンプあり) となるポアソン確率変数である．過程 $J(t)$ はジャンプサイズを示し，そのジャンプサイズはある与えられた確率分布に従うものとする．特に，今回は

$$\log(1 + J(t)) \sim N\left(\log(1 + \mu_\lambda) - \frac{1}{2}\sigma_\lambda^2, \sigma_\lambda^2\right) \qquad (6)$$

に従うものとする．このモデルは，ジャンプ拡散モデルの確率的ボラティリティの拡張と見なすことができる．この HESJ モデルではジャンプのコンポーネントは，基になるボラティリティとは無相関である．さらに一般化すると，確率的金利を組み込むこともできる．

3.1 キャリブレーション

次に HES モデル，HESJ モデルキャリブレーションについて定義していく [8]．モデルキャリブレーションは，パラメータベクトル θ を BS，HES，および HESJ モデルに固有のダイナミクスを指定することである．理想的には，予期しない価格変動の時の損失を防ぐために使用する．そして通常オプションの市場価格を再現するモデルパラメータの最適な選択をする事，同時に，将来にわたる価格変化をキャリブレーションしたパラメータで対応できるのが望ましい．実際には，最適化アルゴリズムを指定された損失関数（LF）で実際の市場価格とモデル数値（価格的またはインプライドボラティリティ）の間の最小の距離を測定した時のパラメータを選択して設定する．

価格の観点から考えるか，インプライドボラティリティの観点から考えるについて，相対価格と比較してインプライドボラティリティは自由に売買できる全範囲にわたってデータの統一を表現することの利点を持っている．よってインプライドボラティリティに基づくキャリブレーションは安定した誤差が検討できる．

ここで，最もよく使われる損失関数

$$LF(\theta, X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i(\hat{X}_i(\theta) - X_i)^p + \Omega(\theta, \theta_0) \qquad (7)$$

に属す θ はモデルパラメータで，$\hat{X}_i(\theta)$ はモデルがはじきだす値で $X_i (i = 1, ..., n)$ は市場価格かインプライドボラティリティで算出される．より安定したキャリブレーションを行うためには，初期推測 θ_0 により，偏差 θ を課す $\Omega(\theta, \theta_0)$ を加える事が必要となる．これらの考慮事項によって，次の 3 つの損失関数を定義する事ができる．

$$MSE(\theta; X) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\hat{X}_i(\theta) - X_i}{\hat{X}_i})^2 \qquad (8)$$

$$PSME(\theta; X) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\hat{X}_i(\theta) - X_i}{\hat{X}_i})^2 \qquad (9)$$

$$MAE(\theta; X) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i(\theta) - X_i| \qquad (10)$$

その中でも本研究においてはインプライドボラティリティの観点から考え，MSE 損失関数を利用することと考える．キャリブレーションにおいて，インプライドボラティリティを適合させる場合，下記の手順をとる．

(1) オプション市場価格から，BS 式を使用して，市場のインプライドボラティリティを求める

(2) モデルのオプション価格から，不明なボラティリティパラメータは BS 式を用いて計算してモデルのインプライドボラティリティを割り出し，HES，HESJ モデルを得る

4 シミュレーション結果

本節では確率ボラティリティモデルの有用性を検証するため，これまで述べてきた確率ボラティリティモデルである HES モデルと HESJ モデルの実証的検証を行う．行うにあたって Matlab を用い，特性関数と FFT による計算方法を適用する事により短時間でコールオプション価格の計算が出来る．実際の日経 225 オプションのデータで 2011 年 5 月 16 日から 8 月 31 の 3ヶ月のデータを用いてシミュレーションを行う事により，モデル検証を行っていく．今回は一節で述べたプットコールパリティの式で日経 225 オプションから仮想データの作成するにあたって金利は 0 とし，取り引き数 30 未満の物は取り扱わない事とする．まず最初に日経 225 オプションの仮想データを使ってインプライドボラティリティで損失関数 MSE を使いキャリブレーションを行い，パラメータ推移をまとめる．そこから得たパラメータで次の日のデータを使いモデル価格を計算し市場価格との誤差を調査し，当日のパラメータでのモデル価格と市場価格との誤差の比較をする．なお縦軸は平均誤差を表し，横軸は日付を表す．

4.1 HES パラメータ

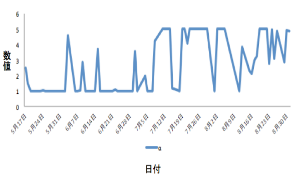

図 1 平均復帰力:α

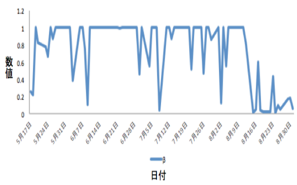

図 2 分散係数:β

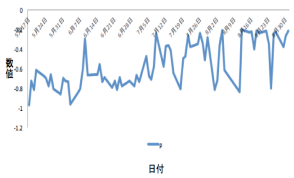

図 3 負の相関パラメータ:ρ

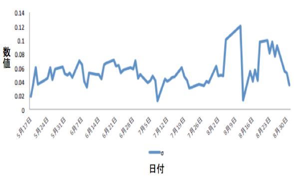

図 4 ボラティリティ:σ

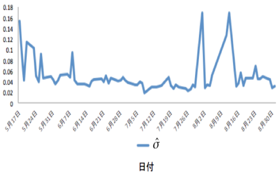

図 5 ボラティリティの推定値:$\hat{\sigma}$

4.2 HESJ パラメータ

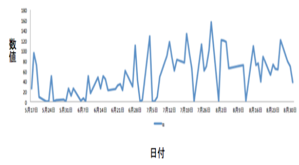

図 6 平均復帰力:α

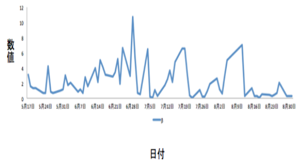

図 7 分散係数:β

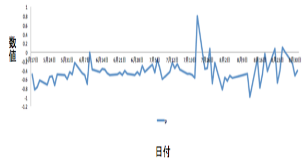

図 8 負の相関パラメータ:ρ

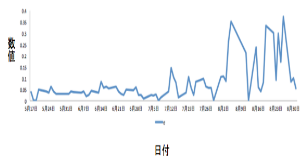

図 9 ボラティリティ:σ

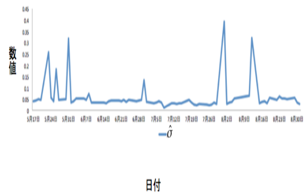

図 10 ボラティリティの推定値:$\hat{\sigma}$

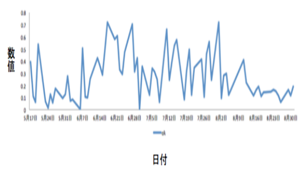

図 11 ジャンプサイズの分散:σ_λ

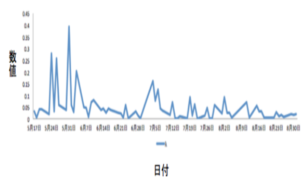

図 12 ジャンプ頻度:λ

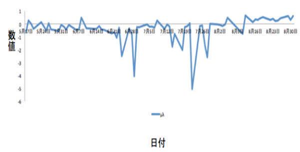

図 13 平均サイズ:μ_λ

4.3 価格誤差

HES モデルのパラメータ推移と HESJ のパラメータ推移はやはり激しく一定の推移が見られない．そして HESJ の平均復帰力である α は非常に大きな変動が見て取れる．このような結果から前日のパラメータを用いて実際にモデル価格を計算し市場価格との誤差を抑える事ができるのか検証していく．

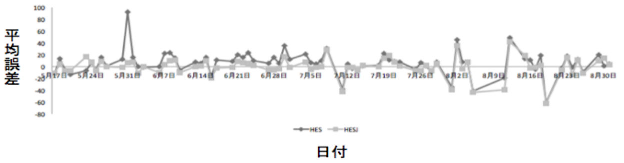

図 14　前日のパラメータで次の日データを使ったモデル価格と市場価格の誤差

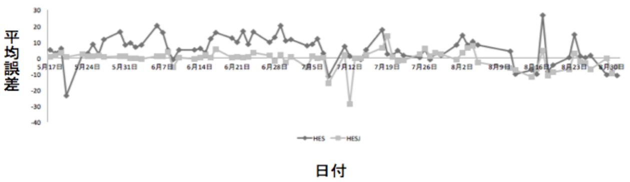

図 15　当日のパラメータでのモデル価格と市場価格の誤差

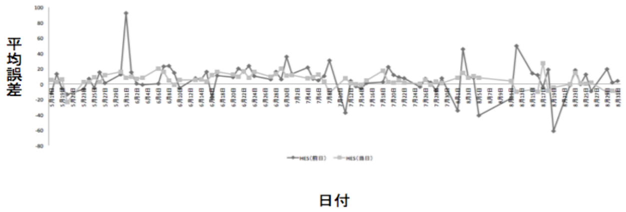

図 16　HES の価格

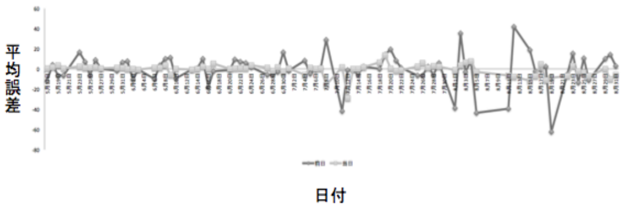

図 17　HESJ の価格

4.4　まとめ

図 14 の損失関数 MSE でインプライドボラティリティの観点からキャリブレーションして得られた前日のパラメータを用いて次の日のデータを使ったモデル価格予想と市場価格の誤差の結果，全体的に安定した推移が見て取れる．しかしながら所々にややおおきな誤差見て取れる．グラフから見て取れる様に，HESJ のほうが 0 に近い推移をしていると思われる．図 15 の損失関数 MSE でインプライドボラティリティの観点からキャリブレーションして得られた当日のパラメータを用いたモデル価格と市場価格の誤差は，HES の価格誤差の推移が激しいのが見て取れる．そして全体的にプラスの誤差が目立つ．今回も前日のパラメータを用いた時と同様に HESJ のほうが安定しかつ 0 に近い推移が見て取れる．図 16 の前日のパラメータと当日のパラメータを比較した．本節の目的である前日をパラメータを用いて次の日の価格誤差は抑えられるのが可能かという事に対してグラフから見て取れる様に，非常に難しい物だと思われる．前日のパラメータの方が推移が激しく当日のパラメータの方が良い結果となった．図 17 の HESJ において前日のパラメータを用いた場合は安定した推移が見て取れるが，所々に大きな誤差が見て取れるので，当日のパラメータにおいてのほうが安定している事が見て取れる．

5　おわりに

本研究ではオプションの価格付けに注目し，確率ボラティリティモデルと呼ばれるクラスを用い，そのモデルの有用性を調査した．有用性の調査を行うために，日経 225 オプションを対象として行い，HES モデル，HESJ モデルを用いて，インプライドボラティリティの観点から損失関数 MSE を用いてキャリブレーションし，前日のデータから得たパラメータは当日のパラメータよりも誤差を抑える事が可能か調査した．結果として，前日のパラメータを使って検証したが，当日のパラメータを用いた方が前日のパラメータよりも誤差が安定していたので前日のパラメータでは誤差を抑えることは難しい事が判明した．しかしながら三ヶ月の期間なので精密な検証とは言いがたい．今後は一年以上のデータを用いて精密な検証を行っていきたい．

参考文献

[1] D. G. Luenberger 著，今野浩, 鈴木賢一，枇々木規雄共訳，金融工学入門，日本経済新聞社，2002.

[2] 宮原孝夫，株価モデルとレヴィ過程，朝倉書店，2003.

[3] S. Heston, “A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options,” *Review of Financial Studies*, 6, pp.327–343, 1993.

[4] G. S. Bakshi, C. Cao, and Z. W. Chen, “Empirical performance of alternative option pricing models,” *Journal of Finance*, 52, pp.2003–2049, 1997.

[5] D. Bates, “Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes in Deutschemark options,” *Review of Financial Studies*, 9, pp.69–108, 1996.

[6] P. Carr and D. H. Madan, “Option evaluation using the Fast-Fourier Transform,” *Journal of Computational Finance*, 2(4), pp.61–73, 1999.

[7] U. Cherubini, G. D. Lunga, S. Mulinacci, and P. Rossi, Fourier transform methods in finance, John Wiley & Sons, 2010.

[8] G. Fusai and A. Roncoroni, Implementing models in quantitative finance: methods and cases, Springer, 2008.