保険加入における意思決定
—確率過程モデルを用いて—

M2011MM061 澤田康佑
指導教員：澤木勝茂

1 はじめに

1.1 研究背景

近年，日本経済の衰退による所得が不安定の中で平均寿命が伸び続けており，介護費用や保険対象外の先進医療費などのリスクの多様化が懸念されている．そこで，生命保険（第一分野）や損害保険（第二分野）とは異なる第三分野保険（医療保険，介護保険，収入保障保険など）が注目されている．第三分野保険は 1996 年の規制緩和により，生命保険会社と損害保険会社のどちらもが参入できる業務分野として，リスク回避への期待が高まっている．しかし，自由な参入と多種多様なリスクに応じるための保険商品の登場により，被保険者は各保険商品の明確な理解や状況に応じた取捨選択が求められている．

1.2 本研究目的

本論文では第三分野保険商品である「収入保障保険」に対して，いつ加入すべきかについての意思決定の基準構築をおこなう．手法として，有限マルコフ決定過程モデルと離散非同次セミマルコフ過程モデルを基に最適な加入時期の決定をおこなう．有限時間におけるマルコフ決定過程モデルは参考文献 [1] を基に，状態を「生存時の年齢」と「死亡」として構築をおこなう．離散非同次セミマルコフ過程モデルは参考文献 [2] を基に，加入直前から加入時までの状態の継続時間と年齢に依存したモデルの構築・拡張をおこなう．拡張として，加入を前提とした参考文献 [2] に対し，本論文では未加入者のリスクとして保険金の機会損失コストを考慮したモデルの構築をおこなう．

1.3 本研究の対象商品

この節では本論文で取り扱う商品の説明をおこなう．「収入保障保険」は，被保険者の所得に対しての保険商品である．保険金は被保険者が「死亡」または「高度障害」となった場合に支払われる生命保険機能を持った保険商品である．さらに「確定年金タイプ」と「逓減定期タイプ」の 2 つタイプに分類される．確定年金タイプは，受取期間を予め設定しておき，被保険者がいつ死亡・高度障害になっても，決められた期間内では保険金を確実に受け取れることに対して，逓減定期タイプは保険期間内に被保険者が死亡・高度障害になると，その時点から満期までの残存期間中のみ保険金が受け取ることができる．本論文では，「逓減タイプ」の収入保障保険を対象商品としている．商品の効力が失われるときは，被保険者の生存，死亡に関わらず満期を迎えたときである．

1.4 データについて

本研究では，厚生労働省発表の平成 23 年簡易生命表のうち，男性の 20 歳から 60 歳までのデータを用いた．生命表は人口統計から各歳の死亡率・生存率を算出した政府発表の加工統計データとなっている [4].

2 有限マルコフ決定過程モデルの保険分野への適応

本章では，有限マルコフ決定過程モデル [1] を基にいつ保険に加入すべきかを決定する意思決定モデルの構築をおこなう．対象者の状態を「生存時の年齢」または「死亡」とし，疾病などのその他の状態を考慮しないことで有限マルコフ決定過程モデルへの適応をおこなった．

2.1 記号定義

本節では，有限マルコフ決定過程モデルを構築するための記号を定義する．

- n:満期
- $\alpha \in [0,1)$:割引率
- $i = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$:状態について
  - i $(1 \leq i \leq n)$:年齢
  - $i = 0$:死亡
- $a = \{1, 2\}$:行動選択について
  - $a = 1$:保険未加入
  - $a = 2$:保険加入
- $p_{i,j}(a)$:推移確率について
  - $p_{i,j}(1) = p_{i,j}(2) = p_{i,j}$
    :行動選択による影響を受けない
  - $p_{i,0}$:i 歳での死亡確率
  - $p_{i,i+1}$:i 歳から $i+1$ 歳までの生存確率
  - $p_{i,j} = 0 \quad for \quad j \neq i+1 \quad or \quad j \neq 0$
  - $p_{i,i+1} + p_{i,0} = 1$
- コストについて
  - C:年間保険料
  - R:年間保険金の機会損失額
  - $c(i,1)$:i 歳で死亡した際の機会損失額
  - $c(i,2)$:i 歳での加入した際の保険料の総額

2.2 保険加入者のコスト $c(i,2)$ について

保険加入者のコストは，「年額の保険料」と「加入時から満期までの残存期間」と「各年齢の死亡確率」から構成する．コスト構造は

$$c(i,2) = C + \alpha p_{i,i+1} c(i+1,2) \tag{1}$$

とする．

$$\begin{aligned} c(i,2) &= C + \alpha p_{i,i+1} c(i+1,2) \\ &= C + \alpha p_{i,i+1}\{C + \alpha p_{i+1,i+2} c(i+2,2)\} \\ &= C + C \sum_{s=i+1}^{n} \alpha^{s-i} \prod_{j=i}^{s-1} p_{j,j+1} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\prod_{j=i}^{s-1} p_{jj+1} = p'_{i,s}$ とおく．$p'_{i,s}$ の性質としては下記の通りである．

- $p'_{i,s} \le p'_{i+1,s}$
- $p'_{i,s} \ge p'_{i,s+1}$
- $p'_{i,s} \ge p'_{i+k,s+k} \quad (k \ge 0)$

$p'_{i,s}$ の性質を考慮した上で，$c(i,2)$ と $c(i+1,2)$ の関係については

$$c(i+1,2) - c(i,2) \le 0 \qquad for \quad 1 \le i \le n \tag{3}$$

となり，$c(i,2)$ は i に関して減少関数である．

2.3 定式化

期待総コスト $V_{n-i}(i)$ を最小化を目的とするモデルの定式化は以下のようである．

目的関数

$$V_{n-i}(i) = \min_{a}\{c(i,1) + \alpha p_{i,i+1}(1) V_{n-i-1}(i+1); c(i,2)\} \tag{4}$$
$$for \quad 0 \le i \le n$$

制約条件

$$V_0(i) = 0 \qquad for \quad i = n \tag{5}$$

$V_{n-i}(i)$ は現在 i 歳の対象者が，満期 n の保険商品に対し $n-i$ 回の加入選択機会があることを示す．また，右辺の左側の第 1 項で i 歳での保険加入を見送った際の機会損失を負い，$i+1$ 歳以降の行動選択をおこなう．右辺の右側は i 歳での保険加入を決定し，残存期間に対しての保険料をコストとして負い，行動選択を終了する．制約条件として満期を迎えた対象者には加入の有無を問わず，コストはないものとすることで数値計算を可能としている．

2.4 期待総コストを最小とする加入期 i^* について

本節では，保険未加入者のコスト構造が増加関数もしくは一定である仮定として

$$c(i,1) \le c(i+1,1) \qquad for \quad 1 \le i \le n \tag{6}$$

を置くことにより，すべての状態 i について解析的な解を持つことを示す．

$i = n-1$ のとき（選択機会が 1 度のとき）

$$\begin{aligned} V_1(n-1) &= \min_{a}\{c(n-1,1) + \alpha p_{n-1,n}(1) V_0(n) \quad (7) \\ &\quad ; c(n-1,2)\} \\ &= \min_{a}\{c(n-1,1); c(n-1,2)\} \quad (8) \end{aligned}$$

である．式 (3)(6) の各コストの増加関数・減少関数の仮定より，加入すべき点があるための条件は最終選択機会 $i = n-1$ で

$$c(n-1,1) \ge c(n-2,2) = C \tag{9}$$

を満たすことである．

$i = n-2$ のとき（選択機会が 2 度のとき）

$$\begin{aligned} V_2(n-2) &= \min_{a}\{c(n-2,1) + \alpha p_{n-2,n-1} V_1(n-1) \\ &\quad ; c(n-2,2)\} \quad (10) \\ &= \min_{a}\{c(n-2,1) + \alpha p_{n-2,n-1} c(n-1,1) \\ &\quad ; c(n-2,2)\} \quad (11) \end{aligned}$$

であり，式 (10)(11) は式 (9) の結果を用いている．

ここで，コスト構造の性質から

$$c(i,2) = C + \alpha p_{i,i+1} c(i+1,2) \tag{12}$$

であり

$$\begin{aligned} V_2(i) &= \min_{a}\{c(n-2,1) + \alpha p_{n-2,n-1} c(n-1,1) \\ &\quad ; C + \alpha p_{n-2n-1} c(n-1,2)\} \\ &= \begin{cases} c(n-2,1) + \alpha p_{n-2,n-1} c(n-1,2) \\ \qquad\qquad if \quad c(n-2,1) \le C \\ c(n-2,2) \qquad if \quad c(n-2,1) \ge C \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

式 (13) の通りに式変形でき，$c(n-2,1) \ge C$ を満たす時には，さらに良い解が存在する可能性があるので，同様に $i = n-3,\ n-4$ と調べていく．

$i = n-k (2 \le k \le n)$ のとき（選択機会が k 度のとき）

$$\begin{aligned} V_k(n-k) &= \min_{a}\{c(n-k,1) \\ &\quad + \alpha p_{n-k,n-k+1} V_{k-1}(n-k+1) \\ &\quad ; c(n-k,2)\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} V_k(n-k) &= \min_{a}\{c(n-k,1) \\ &\quad + \alpha p_{n-k,n-k+1} c(n-k+1,2) \\ &\quad ; c(n-k,2)\} \quad (15) \\ &\quad (16) \end{aligned}$$

$$V_k(n-k) = \begin{cases} c(n-k,1) + \\ \qquad \alpha p_{n-k,n-k+1} c(n-k+1,2) \\ \qquad\qquad if \quad c(n-k,1) \le C \\ c(n-k,2) \qquad if \quad c(n-k,1) \ge C \end{cases}$$

となり，逐次的に行うことにより，期待総コストを最小とする加入期 i^* 求めることができる．判断基準としては，年額の保険金と各期の機会損失との大小関係である式 (17) を満たす i が最適な加入期 i^* である．

$$i^* = \min\{i|c(i,1) \geq C\} \tag{17}$$

3　離散非同次セミマルコフ過程モデル

先行研究 [2] の離散非同次セミマルコフ決定過程モデルを用いて保険加入期の決定についてのモデルの構築を行う．

3.1　記号定義

離散非同次セミマルコフ過程を説明するうえでの記号を定義する．

- N:満期
- J_n:n 回目の推移直後の状態
- Z_t : 時刻 t 時点での状態
  - 1 : 健康，2 : 死亡
- $T_n \quad (\leq N)$:n 回目の推移した時刻
- $X_n(= T_{n+1} - T_n)$:J_n の状態の継続時間
- $N(t)$:時刻 t までに起きた推移の回数
- $\psi_i(s,t)$:期間 (s,t) で状態 i で各期で支払うコスト
  - $\psi_1(s,t)$:年額保険料
  - $\psi_2(s,t)$: 年額保険金
- $v(s,t)$:割引因子

$$= \begin{cases} 1 & if \quad t = s \\ \prod_{h=s+1}^{t} \alpha^h & if \quad t > s \end{cases}$$

- $H_i(s,t) = P[T_{n+1} \leq t | J_n = i, T_n = s]$
  :期間 (s,t) でどこかの状態に推移する確率
- $\phi_{ij}(s,t) = P[Z(t) = j | Z(s) = i, T_{N(s)} = s]$
  :時刻 s で状態 i が時刻 t で状態 j にいる確率で以下のように書き直せる．
  -

$$\phi_{ij}(s,t) = d_{ij}(s,t) + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\vartheta=s+1}^{t} b_{i\beta}(s,\vartheta)\phi_{\beta j}(\vartheta,t) \tag{18}$$

ここで

- $b_{ij}(s,t) = P[J_{n+1} = j, T_{n+1} = t | J_n = i, T_n = s]$
  :時刻 S で状態 i に推移して時刻 t で状態 j に推移する確率
-

$$d_{ij}(s,t) = \begin{cases} 1 - H_i(s,t) & if \ \ i = j \\ 0 & if \ \ i \neq j \end{cases}$$

: 期間 (s,t) で一度も推移しない確率

ここで注意するのは，期間 (s,t) で状態 i から状態 j へ推移し，再び状態 i へ戻ってくる（推移する）場合は含まないことである．式 (18) の右辺の 2 項目は i から j までの推移のすべてのシナリオのそれぞれの確率を書き出し，確率の総和を出している [2].

3.2　推移確率の導出

この節では，先行研究 [2] の特徴でもある加入直前の状態の継続時間を考慮した推移確率の導出をおこなう．新しく以下のことを定義する．

- $B(t) = t - T_{N(t)}$
  :$N(t)$ 回目の推移が起きてから時刻 t までの時間間隔

時間間隔を考慮した推移確率は

$${}^b\phi_{ij}(l,s;t) = P[Z(t) = j | Z(s) = i, B(S) = s - l] \tag{19}$$

式 (19) である．式 (19) は，時刻 s で状態 i に推移してからの時間が $B(s)$ 経過している条件が付いている．期間 (l,s) の状態により確率が変動するようになっている．保険で例を挙げると保険加入前の健康状態がどの程度持続しているかによって，その後の死亡や入院といった状態推移の確率が変わってくる．ここで式 (18) と同様に式 (19) の変形をおこなうと

$${}^b\phi_{ij}(l,s;t) = d_{ij}(l,s;t) + \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\vartheta=s+1}^{t} b_{i\beta}(l,s;\vartheta)\phi_{\beta j}(\vartheta,t) \tag{20}$$

となる．式 (20) 内の各確率も

$$d_{ij}(l,s;t) = \begin{cases} 1 - H_i(l,t)/1 - H_i(l,s) & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases} \tag{21}$$

$$b_{ij}(l,s;t) = b_{ij}(l,t)/1 - H_i(l,s) \tag{22}$$

と直前の状態の継続時間に応じた $B(s)$(時刻 s では状態 i である) の条件の下の確率である式 (21)(22) となる．

3.3　モデルの導出

本節では先行研究モデル [2] を基にモデルの導出をおこなう．

$$\begin{aligned} {}^bV_i(l,s;N) = d_{ij}(l,s;N) &\sum_{\tau=s+1}^{N} \psi_i(s,N)v(s,N) \\ &+ \sum_{k \in I} \sum_{\theta=s+1}^{N} b_{ij}(l,s;\theta) \\ &[\sum_{\tau=s+1}^{\theta} \psi_i(s,t)v(s,t) + \gamma_{i,k}(s,\theta)v(s,\theta) \\ &+ {}^b V(\theta,\theta;N)v(s,\theta)] \end{aligned} \tag{23}$$

右辺の第 1 項は，保険加入後に健康な状態から変化せず，満期まで保険料を払い続けたときのコストである．第 2 項以降は，加入後から満期までの残存時間内での状態の変化に応じたコストをすべて書き下したものとなっている．

4　機会損失を考慮したモデル

本章では，先行研究モデルに機会損失を考慮した拡張モデルについて述べる．

4.1　記号定義

拡張に伴い，前章に加えて以下を新たに定義する．

- s:加入期
- l:加入考察期
- $\psi_i(s,t)$:期間 (s,t) で状態 i で各期で支払う金額
  - $\psi_1(s,t)$:年額保険料
  - $\psi_2(s,t)$：年額保険金
  - $\psi_3(s,t)$：年単位での機会損失
- $v(s,t)$:割引因子
- $g(l,s)$:機会損失額

4.2　機会損失項について

本研究の先行研究 [2] の拡張として，加入を前提とした先行研究 [2] に対して保険未加入者のリスクである保険金の機会損失を考慮したモデルの構築をおこなった．機会損失項として加入期 s 以前に死亡し，その地点から満期までの残存期間に得れた保険金に対してのものとなっている．機会損失項のコスト構造は

$$g(l,s) = \sum_{\theta=l+1}^{s} b_{i,j}(l,\theta) \sum_{\tau=\theta+1}^{N} \psi_3(l,\tau)v(l,\tau) \tag{24}$$

としている．

4.3　定式化

期待総コスト $V^*_{i(n-i)}$ を最小とする拡張モデルは式 (25) である．目的関数

$$\begin{aligned} V^*_{i(N-i)}(l,s;N) = \min_a \{ & g(l,s) \\ & + \alpha p_{s,s+1} V^*_{i(N-i+1)}(l,s+1;N) \\ & ;^b V_i(l,s;N)\} \\ for \quad l \le s \le N & \end{aligned} \tag{25}$$

制約条件

$$V_0(l,l;l) = 0 \qquad if \quad l = s = N \tag{26}$$

式 (4) と同様に，左辺は満期 N の保険商品に対し $N-i$ 回の加入選択機会があることを示す．また，右辺の左側の第 1 項で i 歳での保険加入を見送った際の機会損失を負い，$i+1$ 歳以降の行動選択をおこなう．右辺の右側は i 歳での保険加入を決定し，残存期間に対しての保険料をコストとして負い，行動選択を終了する．制約条件により，選択回数が 0 回のときにはコストを 0 とすることで計算をすることができる．

5　数値実験

構築したモデル式 (4)(25) に具体的に数値例を示す．

有限マルコフ決定過程モデルの状況設定として，初期状態 i は 20 歳の保険未加入者，満期 n は 60 歳，年額保険料 C は 36 千円，機会損失額 R は 2400 千円，割引率は 0.8 としている．結果としては，41 歳時に加入するとき期待総コストを最小とし，最小値は 35.182 千円である．

拡張モデルの状況設定として，加入考察期 l は 20 歳の保険未加入者，満期 N は 60 歳，年額保険料 ψ_1 は 36 千円，年額保険金 ψ_2 は-2400 千円，機会損失 ψ_3 は 2400 千円，割引率は 0.8 としている．結果は，期待総コストを最小とするのは加入期が 36 歳の時の-1260.819 である．期待総コストが有限マルコフ決定過程モデルと異なり負の値となっている理由として，保険金の受け取りを考慮しているためである．

6　終わりに

本研究では，収入保障保険へいつ加入すべきかについて有限マルコフ決定過程モデルと離散非同次セミマルコフ過程モデルを用いて意思決定モデルの構築をおこなった．有限マルコフ決定過程モデルでは,「生存時の年齢」と「死亡」を推移の状態として捉えることで，保険商品に対しての適応を示した．離散非同次セミマルコフ過程モデルでは，先行研究 [2] に保険未加入のリスクを保険金の機会損失として捉え，意思決定モデルへの拡張をおこなった．保険未加入者のリスクと加入のリスクの 2 つの観点からの意思決定モデルの構築をおこなった．

今後の研究として業種や病歴などの要因を取り入れた推移確率を先行研究 [3] の経験表の作成方法を基に構築することや，機会損失に対しての理解を深めることでより現実の状況に沿ったモデルの構築をおこなうことである．

参考文献

[1] Sheldom M.Ross, *Applied probability models with optimization applications*, Courier Dover Publications, 1970.

[2] Guglielmo D'Amico, Montserrat Guillen and Raimondo Manaca, 'Discrete time Non-homogeneous Semi-Markov Processes applied to Models for Disability Insurance', 2012.

[3] 田中周二,「第三分野保険 (医療，就業不能，介護) の経験表の作成について」，総合政策学ワーキングシリーズ，2005.

[4] 厚生労働省：「平成 23 年簡易生命表」, 2012 年 7 月最終アクセス．
(http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw
/life/life11/index.html)