

# 常微分方程式のシンプレクティック数値解法について

M2012MM019 宮川 雅有

指導教員：小藤 俊幸

## 1 はじめに

離散変数法は微分方程式の解をできるだけ正確に近似しようと構成された。一方、微分方程式で記述される現象がある種の「構造」をもっていて、その構造の数値的再現も期待されることが多々ある。離散変数法が、この構造再現性をどれだけ有しているか、もし完全な再現ができないとしたら、その「ずれ」はどれだけであるかといった疑問に解答を与える解析が近年盛んである。エネルギーが保存される現象を記述する方程式であるハミルトン系の解法について述べる。シンプレクティック数値解法 (symplectic numerical method) とは、ハミルトン系、すなわちエネルギーが保存される系の状態を記述する微分方程式のシンプレクティック構造を保存する数値解法のことである。平面上の図形を別の平面上にうつしたとき、面積を保ちつつ、形ができるだけ変化しないように精度を高めていく。ルンゲ・クッタ法のような通常の数値解法と同様に、次数条件式、すなわち係数パラメータが満たす条件式から解法の精度が決まる。文献 [[1],[2]] では、類似の解法について安定性が考察されている。シンプレクティック・オイラー法よりも安定性の高い解法を見つけて比較していくことが目的である。

## 2 ハミルトン系

$\mathbb{R}^{2d}$  値関数  $x(t) = [q(t)^T, p(t)^T]^T$  ( $q(t), p(t) \in \mathbb{R}^d$ ) を未知変数とする方程式を考える。 $\mathbb{R}^{2d}$  上で定義された  $C^2$  級関数  $H(q, p)$  を用いて、

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad (1)$$

と表される方程式をハミルトン系、関数  $H(q, p)$  をハミルトニアンと言う。

## 3 シンプレクティック写像とは

定義 1  $2d$  次正方行列  $M$  が

$$M^T J M = J, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

をみたすとき、 $M$  を  $2d$  次のシンプレクティック行列と言う。 $2d$  次シンプレクティック行列全体の集合を  $Sp(d, \mathbb{R})$  と表す。

$2d$  次正方行列を

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (A, B, C, D : d \text{ 次正方行列})$$

のように表すとき、

$$M^T J M = \begin{bmatrix} A^T C - C^T A & A^T D - C^T B \\ B^T C - D^T A & B^T D - D^T B \end{bmatrix}$$

となることから、条件 (2) は

$$A^T C = C^T A, \quad A^T D - C^T B = I_d, \quad B^T D = D^T B \quad (3)$$

のように書き換えることができる。特に、 $Sp(1, \mathbb{R})$  は、行列式の値が 1 である  $2 \times 2$  行列全体の集合である。また、条件 (2) から容易に確かめられるように、 $Sp(d, \mathbb{R})$  は行列の積を乗法とする群となる。特に、 $I_{2d} \in Sp(d, \mathbb{R})$  であり、

$$M_1, M_2 \in Sp(d, \mathbb{R}) \implies M_1 M_2 \in Sp(d, \mathbb{R}) \quad (4)$$

が成り立つ。実際、 $M_1^T J M_1 = J$ ,  $M_2^T J M_2 = J$  ならば、

$$(M_1 M_2)^T J (M_1 M_2) = M_2^T (M_1^T J M_1) M_2 = M_2^T J M_2 = J$$

となる。

定義 2  $\mathbb{R}^{2d}$  の領域  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級の写像

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$$

が、シンプレクティック写像であるとは、任意の  $x \in \Omega$  について、 $DF(x) \in Sp(d, \mathbb{R})$  が成り立つことを言う。ここで、 $DF$  は、写像  $F$  のヤコビ行列

$$\left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq 2d}$$

を表す。

シンプレクティック行列の性質 (4) から、つぎの定理が得られる。ハミルトン系の数値解法を考える際に基本となる定理である。

定理 1 定理 1  $\Omega_1, \Omega_2$  を  $\mathbb{R}^{2d}$  の領域とし、写像  $F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ ,  $F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  は、各領域上でシンプレクティックであるとする。さらに、 $F(\Omega_1) \subset \Omega_2$  とすると、合成写像  $G(x) = F_2(F_1(x))$  ( $x \in \Omega_1$ ) は、 $\Omega_1$  上のシンプレクティック写像となる。

これは、合成写像  $G(x) = F_2(F_1(x))$  のヤコビ行列は  $DG(x) = DF_2(F_1(x))DF_1(x)$  と表される。したがって、 $DF_2(F_1(x)), DF_1(x) \in Sp(d, \mathbb{R})$  ならば、(4) により、 $DG(x) \in Sp(d, \mathbb{R})$  が成り立つので、 $\Omega_1, \Omega_2$  を  $\mathbb{R}^{2d}$  の領域とし、写像  $F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ ,  $F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  は、各領域上でシンプレクティックであるとき、 $F(\Omega_1) \subset \Omega_2$  とすると、合成写像  $G$  は、 $\Omega_1$  上のシンプレクティック写像となる。

シンプレクティック写像の幾何学的意味を、簡単に述べておく。 $Sp(1, \mathbb{R})$  は行列式の値が 1 である  $2 \times 2$  行列の集合である。したがって、写像  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  がシンプレクティックであるための必要十分条件は、各点  $x \in \mathbb{R}^2$  で

$\det[DF(x)] = 1$  が成り立つことである。  $\mathcal{D}$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域とすると、積分の変数変換の公式により、

$$\int_{F(\mathcal{D})} dx = \int_{\mathcal{D}} \det[DF(x)] dx = \int_{\mathcal{D}} dx \quad (5)$$

が成り立つ。したがって、 $\mathbb{R}^2$  の任意の領域  $\mathcal{D}$  について、 $\mathcal{D}$  の面積と写像  $F$  による像  $F(\mathcal{D})$  の面積は等しい。つまり、 $\mathbb{R}^2$  上のシンプレクティック写像とは、面積を保つ写像に他ならない。

## 4 シンプレクティック数値解法

### 4.1 シンプレクティック・オイラー法

簡単な例として、実数値関数  $q(t), p(t)$  に関する

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -q \quad (6)$$

の方程式（単振動の方程式）を考える。関数  $H(q, p) = (1/2)(p^2 + q^2)$  をハミルトニアンとするハミルトン系である。この方程式にオイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n - hq_n \end{cases} \quad (7)$$

の差分方程式が得られ、これをベクトル、行列を用いて表すと、

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

のようになる。右辺の行列の行列式は  $1 + h^2$  であることから、(8) によって、 $(q_n, p_n)$  平面上の図形を  $(q_{n+1}, p_{n+1})$  平面上にうつすと、面積が必ず  $(1 + h^2)$  倍に拡大される。また、後退オイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n - hq_{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

が得られ、この式で  $(q_n, p_n)$  平面上の図形を  $(q_{n+1}, p_{n+1})$  平面上にうつすと、今度は、面積が必ず  $(1/(1 + h^2))$  に縮小される。

シンプレクティック・オイラー法は、いわば、両者のバランスを取ったものである。オイラー法 (7) の第 2 式の  $q_n$  だけを  $q_{n+1}$  で置き換えて、

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n - hq_{n+1} \end{cases} \quad (11)$$

のようになる。第 1 式を第 2 式に代入すると、 $p_{n+1} = p_n - h(q_n + hp_n) = -hq_n + (1 - h^2)p_n$  となり、(11) は

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 - h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

のように書き直される。この場合は、行列式の値が 1 となることから、(12) は面積を不変に保つ写像、つまり、シンプレクティック写像となる。このように、ハミルトン系に適用した際の計算式がシンプレクティック写像となるような数値解法のことを、シンプレクティック数値解法と言う。

### 4.2 写像の合成に基づく高精度化

実際の計算では、解法の収束回数も重要であり、より高い次数をもつシンプレクティック解法が、いくつかの観点から考えられている。

$s (\geq 1)$  を整数とし、

$$b_1, b_2, \dots, b_s, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_s \quad (13)$$

の  $2s$  個の実数を考える。ルンゲ・クッタ法の場合にならって、 $b_i, \hat{b}_i (1 \leq i \leq s)$  を係数パラメータと呼ぶことにする。各  $i$  に対して、写像  $\mathcal{S}_i: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  を

$$\mathcal{S}_i = S_P^{\hat{b}_i h} S_Q^{b_i h} \quad (14)$$

のように定義すると、写像  $S_E^h$  と同様、シンプレクティック写像となる。

この  $\mathcal{S}_i$  を用いて、 $x_n = [q_n^T, p_n^T]^T$  から  $x_{n+1} = [q_{n+1}^T, p_{n+1}^T]^T$  の計算式を

$$x_{n+1} = S^h(x_n) \quad (S^h = S_s \cdots S_2 S_1) \quad (15)$$

のように与える。ここで、 $S_s \cdots S_2 S_1$  は、写像  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_s$  の合成写像を表し、定理 1 により、シンプレクティック写像である。係数パラメータ  $b_i, \hat{b}_i (1 \leq i \leq s)$  をうまく定めて、局所誤差が  $\mathcal{O}(h^{p+1})$  となるようにすれば、 $p$  次のシンプレクティック解法が得られる。

例えば、 $s = 2$  の場合、(15) は、中間変数  $Q, P (\in \mathbb{R}^d)$  を導入することにより、

$$\begin{cases} Q & = & q_n + h b_1 f(p_n) \\ P & = & p_n + h \hat{b}_1 g(Q) \\ q_{n+1} & = & Q + h b_2 f(P) \\ p_{n+1} & = & P + h \hat{b}_2 g(q_{n+1}) \end{cases} \quad (16)$$

のように表される。シンプレクティック・オイラー法の場合と同じく、 $f(p) = \nabla_p T(p), g(q) = -\nabla_q U(q)$  としている。これより、

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + h(b_1 + b_2)f(p_0) \\ &\quad + h^2(\hat{b}_1 b_2)Df(p_0)g(q_0) + \mathcal{O}(h^3) \\ p_1 &= p_0 + h(\hat{b}_1 + \hat{b}_2)g(q_0) \\ &\quad + h^2[\hat{b}_1 b_1 + \hat{b}_2(b_1 + b_2)]Dg(q_0)f(p_0) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

の展開式が得られ、係数パラメータが

$$b_1 + b_2 = 1, \quad \hat{b}_1 + \hat{b}_2 = 1, \quad \hat{b}_1 b_2 = \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$\hat{b}_1 b_1 + \hat{b}_2(b_1 + b_2) = \frac{1}{2} \quad (18)$$

をみたすならば、この展開式は厳密解の展開式(??)と  $h^2$  の項まで一致する。つまり、局所誤差が  $O(h^3)$  となる。なお、 $\widehat{b}_1 b_1 + \widehat{b}_2(b_1 + b_2) = (\widehat{b}_1 + \widehat{b}_2)(b_1 + b_2) - \widehat{b}_1 b_2$  より、条件(18)は(17)から導かれる。したがって、この場合の“次数条件式”は(17)のみとなり、2次公式の係数パラメータは、 $b_2 \neq 0$  を任意定数として、

$$b_1 = 1 - b_2, \quad \widehat{b}_1 = \frac{1}{2b_2}, \quad \widehat{b}_2 = 1 - \frac{1}{2b_2} \quad (19)$$

のように表される。例えば、 $b_2 = 1$  とおくと、 $b_1 = 0$ 、 $\widehat{b}_1 = \widehat{b}_2 = 1/2$  となり、さらに、 $P = p_{n+\frac{1}{2}}$  とおくことにより、(16)は

$$\begin{cases} p_{n+\frac{1}{2}} = p_n + \frac{h}{2} g(q_n) \\ q_{n+1} = q_n + h f(p_{n+\frac{1}{2}}) \\ p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} g(q_{n+1}) \end{cases} \quad (20)$$

と表される。この公式から定まる解法は、関連する二階微分方程式の解法にちなんで、シュテルマー・ベルレの方法と呼ばれている。

二階微分方程式

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = g(q) \quad (21)$$

に対して、

$$\frac{q_{n+2} - 2q_{n+1} + q_n}{h^2} = g(q_{n+1}) \quad (22)$$

で定まる解法を、シュテルマーの方法、あるいは、ベルレの方法と言う。出発値  $q_0, q_1$  を与えると、数値解が次々と計算される二段階法である。ここで、 $q'(t_n + h/2)$  の近似値に相当する  $p_{n+1/2}$  を

$$p_{n+\frac{1}{2}} = \frac{q_{n+1} - q_n}{h} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

により定義すると、(22)は、

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h p_{n+\frac{1}{2}} \\ p_{n+\frac{3}{2}} = p_{n+\frac{1}{2}} + h g(q_{n+1}) \end{cases} \quad (23)$$

のように書き直される。初期条件として  $q_0, p_{1/2}$  を与えると、数値解が計算される“一段階法もどき”の解法となる。“幅  $h/2$  のステップ点”上の近似値が一つおきに計算される点に着目して、蛙飛び法、あるいは、馬飛び法と呼ぶ場合もある。さらに、 $p_n$  を

$$p_n = p_{n-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} g(q_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義すると、(23)は、 $f(p) \equiv 1$  の場合の(20)に書き直され、一段階法の形に定式化される。

より高次の公式もこうした考えに基づき構成される。例えば、3次の公式として、 $s = 3$  のルースの公式が存在する。[4]

$$\begin{matrix} b_i & : & 7/24 & 3/4 & -1/24 \\ \widehat{b}_i & : & 2/3 & -2/3 & 1 \end{matrix} \quad (24)$$

ここで、(24)は、 $b_i$  の行が左から順に  $b_1, b_2, \dots$  を、 $\widehat{b}_i$  の行が  $\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \dots$  を表している。

このうち、(24)の係数は、3次精度となるための条件式

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, & \widehat{b}_1 + \widehat{b}_2 + \widehat{b}_3 = 1 \\ b_2 \widehat{b}_1 + b_3 (\widehat{b}_1 + \widehat{b}_2) = 1/2, & b_2 \widehat{b}_1^2 + b_3 (\widehat{b}_1 + \widehat{b}_2)^2 = 1/3 \\ \widehat{b}_1 b_1^2 + \widehat{b}_2 (b_1 + b_2)^2 + \widehat{b}_3 (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 1/3 \end{cases} \quad (25)$$

から(直接)定められたものである。[3]

## 5 シンプレクティック解法の安定性

行列式の値が1となり面積を不変に保ったとしても形まで不変とは限らない。そこでシンプレクティック数値解法よりも安定性の高い解法を見つけて行きたいと考えている。そこでまずは、テスト方程式

$$\frac{dq}{dt} = \omega p, \quad \frac{dp}{dt} = -\omega q, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (26)$$

$H(q, p) = \omega(p^2 + q^2)/2$  をハミルトニアンとするハミルトン系

$$\begin{bmatrix} q(t_{n+1}) \\ p(t_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t_n) \\ p(t_n) \end{bmatrix}, \quad \theta = \omega \Delta t \quad (27)$$

について考える。

テスト方程式(26)にシンプレクティックオイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \theta p_n \\ p_{n+1} = p_n - \theta q_{n+1} \end{cases}, \quad \theta = \omega t \quad (28)$$

$$p_{n+1} = p_n - \theta q_{n+1} = p_n - \theta(q_n + \theta p_n) = -\theta q_n + (1 - \theta^2)p_n$$

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 - \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

テスト方程式(26)にシンプレクティック法を適用すると、

$$\begin{cases} Q = q_n + \theta b_1 p_n \\ P = p_n - \theta \widehat{b}_1 Q \\ q_{n+1} = Q + \theta b_2 P \\ p_{n+1} = P - \theta \widehat{b}_2 q_{n+1} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} P &= p_n - \theta \widehat{b}_1 (q_n + \theta b_1 p_n) = -\theta \widehat{b}_1 q_n + (1 - \theta^2 \widehat{b}_1 b_1) p_n \\ q_{n+1} &= q_n + \theta b_1 p_n + \theta b_2 \{-\theta \widehat{b}_1 q_n + (1 - \theta^2 \widehat{b}_1 b_1) p_n\} \\ &= (1 - \theta^2 b_2 \widehat{b}_1) q_n + \{\theta(b_1 + b_2) - \theta^3 b_2 \widehat{b}_1 b_1\} p_n \\ p_{n+1} &= -\theta \widehat{b}_1 q_n + (1 - \theta^2 \widehat{b}_1 b_1) p_n \\ &\quad - \theta \widehat{b}_2 [(1 - \theta^2 b_2 \widehat{b}_1) q_n \\ &\quad + \{\theta(b_1 + b_2) - \theta^3 b_2 \widehat{b}_1 b_1\} p_n] \\ &= \{-\theta(b_1 + b_2) + \theta^3 \widehat{b}_2 b_2 b_1\} q_n \\ &\quad + \{1 - \theta^2(\widehat{b}_1 b_1 + \widehat{b}_2 b_1 + \widehat{b}_2 b_2) + \theta^4 \widehat{b}_2 b_2 \widehat{b}_1 b_1\} p_n \end{aligned}$$

2 次の次数条件

$$b_1 + b_2 = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 = 1, \quad \hat{b}_1 b_2 = \frac{1}{2} \quad (31)$$

を仮定すると,

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta - \frac{\theta^3}{2} b_1 \\ -\theta + \frac{\theta^3}{2} \hat{b}_2 & 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2} b_1 \hat{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

となる. 行列  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) について, 以下を仮定する.

$$ad - bc = 1, \quad |a + d| < 2 \quad (33)$$

$ad = 1$  ならば  $|a + d| \geq 2$  となることから,  $b \neq 0$  である. また, 行列  $A$  の固有値は絶対値 1 の複素数

$$\lambda_{\pm} = \frac{a + d \pm i\sqrt{4 - (a + d)^2}}{2} \quad (34)$$

で与えられる.

定理

$$\mu = \frac{d - a + i\sqrt{4 - (a + d)^2}}{2b} \quad (35)$$

とおくとき, 任意の自然数  $n$  について,

$$\|A^n\| \leq \frac{1 + |\mu|^2 + |1 + \mu^2|}{|\mu - \bar{\mu}|} \quad (36)$$

が成り立つ. ここで,  $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムから導出される行列ノルムを表す.

シンプレクティック・オイラー法の行列ノルムを求めると,

$$\|A^n\| \leq \frac{2 + |\theta|}{\sqrt{4 - \theta^2}} \quad (37)$$

になる.

ここでシュテルマー・ベルレの解法の値を使うと,

$$b_1 = 0, b_2 = 1, \quad \hat{b}_1 = \frac{1}{2}, \hat{b}_2 = \frac{1}{2} \quad (38)$$

となり, 行列ノルムは,

$$\|A^n\| \leq \frac{2}{\sqrt{4 - \theta^2}} \quad (39)$$

になった.

さらに, ルースの公式を用いた時,

$$b_1 = \frac{7}{24}, b_2 = \frac{3}{4}, b_3 = -\frac{1}{24}, \hat{b}_1 = \frac{2}{3}, \hat{b}_2 = -\frac{2}{3}, \hat{b}_3 = 1 \quad (40)$$

となり,  $\mu$  は,

$$\mu = \frac{\frac{\theta^4}{18} - \frac{7\theta^6}{1728} + i\sqrt{4 - (2 - \theta^2 + \frac{\theta^4}{12} - \frac{7\theta^6}{1728})^2}}{2(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{7\theta^5}{1728})} \quad (41)$$

となり, ルースの行列ノルムの図はプログラムを使用して求め, 3 つの行列ノルムの式を合わせた図は以下のようになった.

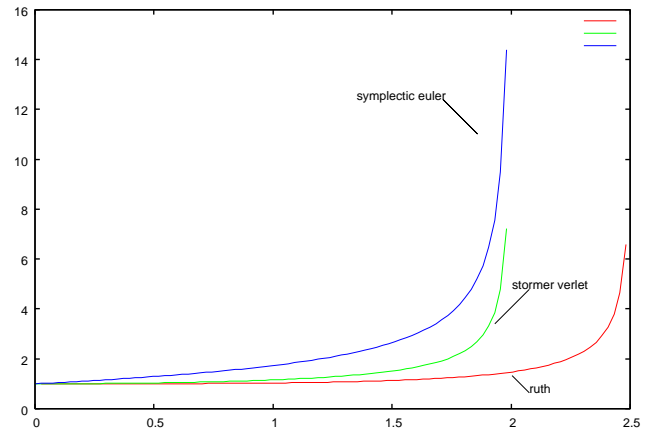


図 1 シンプレクティック解法の安定性

y 軸の値が 1 に近いほど, 形を原型に近くなる. つまり, シンプレクティック・オイラー法の時よりも, シュテルマー・ベルレの解法の方がゆっくりと上昇しているのがわかる. そして, シンプレクティック・オイラー法とシュテルマー・ベルレの解法は  $x=2$  で無限大に近付いているが, ルースの公式では  $x=2.5$  付近で無限大に近付き 2 つの解法よりもゆっくり上昇しているため, 3 つの解法の中では一番安定性が高いことがわかった.

## 6 おわりに

シンプレクティック・オイラー法とシュテルマー・ベルレの解法の 2 つは  $x=2$  で無限大に近づき, シュテルマー・ベルレの解法の方がゆっくり上昇しているためシュテルマー・ベルレの解法の方が安定性が高いことがわかる. ルースの公式では,  $x=2.5$  付近無限大に近づいて, シンプレクティック・オイラー法, シュテルマー・ベルレの解法よりもゆっくり上昇しているため解法よりも安定性が高いことがわかった. 次数が高いほど安定性が高くなることがわかった.

## 参考文献

- [1] 村井大介, " 偏微分方程式の初期値境界値問題と形状最適化問題に対する数値解法の誤差解析" 名古屋大学大学院情報科学研究科博士論文, 2012.
- [2] MURAI, DAISUKE; KOTO, TOSIYUKI, Stability and convergence of staggered Runge-kutta schemes for semilinear wave equations, *J. Comput. Appl. Math* **235** (2011), no14 4251-4264.
- [3] 三井斌友, 小藤俊幸, 斎藤善弘, " 微分方程式による計算科学入門", 共立出版, 2004
- [4] R. D. RUTH, A canonical integration technique, *IEEE Trans. Nuclear Sci.*, **30** (1983), 2669-2671.