領域「図形」における証明の構想の数理的考察

M2012MM005 原田直樹
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，中学校・高等学校の数学の領域「図形」における証明の構成法を数理的視点から分析・整理し，その結果を証明教育に応用することである．

修士論文では，証明における

(i) すでに正しいと認められたことがら

(ii) 次に行う推論の選び方

の2つを明らかにした．ただし，(i) は，[1],[2],[3] にしたがって学習しているという前提で明らかにした．そして，広範囲に適用可能な証明の構成法を考え，それを具体例で確認した．

上の (i),(ii) を明らかにすることは，同時に証明教育において強調すべき点も明らかにしている．また，ここで与える証明の構成法によって，現行の教科書 [1],[2],[3] に載っていない証明法を見い出せることも，具体例を通して示されることになる．これらは証明教育に役立つ情報である．

本稿では，2節で (i) を明らかにし，3節で (ii) を明らかにする．そして，4節の具体例では，本研究の証明の構成法がよく表れている問題を，[2] と [3] から各1問抜粋し述べる．

2　前提の明確化

この章では，前章の (i) を明らかにする．(i) は次の2種類に分類できる．

- 論理結合子，限定子の性質
- 既習の性質

前者は，次の推論である．

$$\frac{P_1(\vec{a})\cdots P_n(\vec{a}) \quad \forall\vec{x}(P_1(\vec{x})\&\cdots\&P_n(\vec{x})\Rightarrow Q(\vec{x}))}{Q(\vec{a})} \quad (**)$$

後者は，どれも次の形をしている．

$$\forall\vec{x}(P_1(\vec{x})\&\cdots\&P_n(\vec{x})\Rightarrow Q(\vec{x})) \qquad (*)$$

ここで $\vec{x}$ は “$x_1,\cdots,x_m$” を表し，$\forall\vec{x}$ は “$\forall x_1 \cdots \forall x_m$” を表す．具体的には，以下の**性質リスト**に挙げる．本稿では，4節の具体例で用いる性質，また，用いる可能性がある性質のみを記載する．そのリストは，習う順にならべる．

また，“すべての $x_1\cdots x_m$ について” という言い換えをしたときに $x_1\cdots x_m$ となる部分には下線をひくこととする．ただし，証明すべき各文に応じて，既習の性質は制限される．その詳細は4節で具体例を通して示す．

性質リスト ([1], [2], [3])

(0) 重なっている 辺 の長さは等しい．

(1) 2直線 l,m が平行であるとき，点Pを，l 上のどこをとっても，点Pと直線 m との距離は一定である．

(2) 対頂角の性質

　対頂 角 は等しい

(3) 平行線の性質

　2つの直線に1つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ．

　(a) 2つの直線 が平行ならば，同位角は等しい．

　(b) 2つの直線 が平行ならば，錯角は等しい．

(4) 平行線になる条件

　2つの直線に1つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ．

　(a) 同位 角 が等しいならば，この2つの直線は平行である．

　(b) 錯 角 が等しいならば，この2つの直線は平行である．

(5) 三角形の内角・外角の性質

　(a) 三角形 の3つの内角の和は $180°$ である．

　(b) 三角形 の1つの外角は，そのとなりにない2つの内角の和に等しい．

(8) 合同な図形の性質

　(a) 合同な 図形 では，対応する線分の長さは，それぞれ等しい．

　(b) 合同な 図形 では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい．

(9) 三角形の合同条件

　2つの 三角形 は，次の各場合に合同である．

　(a) 3組の辺が，それぞれ等しいとき

　(b) 2組の辺とその間の角が，それぞれ等しいとき

　(c) 1組の辺とその両端の角が，それぞれ等しいとき

(10) 二等辺三角形

　(a) 2つの辺が等しい 三角形 は，二等辺三角形である．

　(b) 二等辺 三角形 ならば，2つの辺は等しい．

(11) 二等辺三角形の性質

　(a) 二等辺 三角形 の2つの底角は等しい．

　(b) 二等辺 三角形 の頂角の二等分線は，底辺を垂直に2等分する．

(12) 2角が等しい三角形

2 つの角が等しい 三角形 は，二等辺三角形である．

(13) 3 つの辺がすべて等しい 三角形 を，正三角形という．

(14) 直角三角形の合同条件

2 つの直角 三角形 は，次の各場合に合同である．

(a) 斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいとき

(b) 斜辺と他の 1 辺が，それぞれ等しいとき

(15) 平行四辺形 ならば，向かいあう 2 組の辺は，それぞれ平行である．

(16) 平行四辺形の性質

(a) 平行四辺形 の 2 組の向かい合う辺は，それぞれ等しい．

(b) 平行四辺形 の 2 組の向かい合う角は，それぞれ等しい．

(c) 平行四辺形 の対角線は，それぞれの中点で交わる．

(17) 平行四辺形になる条件

四角形 は，次の各場合に平行四辺形である．

(a) 2 組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるとき (定義)

(b) 2 組の向かいあう辺が，それぞれ等しいとき

(c) 2 組の向かいあう角が，それぞれ等しいとき

(d) 対角線が，それぞれの中点で交わるとき

(e) 1 組の向かいあう辺が，等しくて平行であるとき

(18) 4 つの角がすべて等しい 四角形 は，長方形である．

(19) 4 つの辺がすべて等しい 四角形 は，ひし形である．

(20) 4 つの辺がすべて等しく，4 つの角がすべて等しい 四角形 を，正方形という．

(22) 相似な図形の性質

(a) 相似な 図形 では，対応する線分の長さの比は，すべて等しい．

(b) 相似な 図形 では，対応する角の大きさは，それぞれ等しい．

(23) 三角形の相似条件

2 つの 三角形 は，次の各場合に相似である．

(a) 3 組の辺の比が，すべて等しいとき

(b) 2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいとき

(c) 2 組の角が，それぞれ等しいとき

(24) 平行線と線分の比

△ABC で，辺 AB,AC 上に，それぞれ，点 P,Q があるとき，

(a) PQ∥BC ならば，AP:AB=AQ:AC=PQ:BC

(b) PQ∥BC ならば，AP:PB=AQ:QC

3 推論の選び方の明確化

この章では，1 節の (ii) を明らかにする．(ii) の選び方は次の 2 つである．

- 導きたい性質が $Q(\vec{a})$ のとき，すでに正しいと認められた性質から，(∗) の形の性質を探し，(∗∗) を推論として選ぶ．複数の可能性があるときは，$P_1(\vec{a}),\cdots,P_n(\vec{a})$ のうちできるだけ多くが「使える性質」であるような (∗∗) を優先する．この推論の適用後は，導きたい性質は，$P_1(\vec{a}),\cdots,P_n(\vec{a})$ に変わる．
- 使える性質に $P_1(\vec{a}),\cdots,P_n(\vec{a})$ があるとき，すでに正しいと認められた性質から，(∗) の形の性質を探し，(∗∗) を推論として選ぶ．この推論の適用後は，使える性質に $Q(\vec{a})$ が加わる．

ここで提案する証明の構想とは，証明すべき文に対して，仮定，(i)，結論を明らかにし，上の 2 つの推論を，使える性質の中に導きたい性質が現れるまで適用し続けることである．

以後，上の 2 つで選ばれた推論 (∗∗) と性質 (∗) を同一視し，性質 (∗) のことを，推論 (∗∗) の意味でも用いることにする．

4 具体例

この節では，[2],[3] で証明されている性質に対し，その証明を前節の構成法にしたがって構成していく．その構成法に基づいた証明の構想の例を挙げる．その結果，仮定と結論の双方から証明を構成していくことにより，導く推論がより明確になることがわかった．推論の様子は，フローチャートにより示していく．

例題 1([2],p. 134 の 7)

図 1 は，リボンを重ねた図である．このリボンの幅が一定であるならば，□ABCD はひし形である．

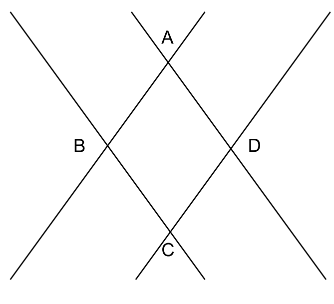

図 1 例題 1 の図

まず，仮定，既習の性質，結論を明確にする．

仮定：リボンの幅が一定，図 1 のように重なっている

既習の性質：(0)〜(21)

結論：□ABCD はひし形

次に，証明の構想を記述する．この構想の大枠を図 3, 図 5, 図 7 のフローチャートに示しておく．

仮定からわかることは，AB∥CD,AD∥BC である．よって，□ABCD は平行四辺形である．

結論は，ひし形であることなので，ひし形の定義である，4 つの辺がすべて等しい，を証明すればよい．(16)-(a) より，AB=CD,BC=DA なので，AB=BC もしくは，CD=DA を示せばよいことがわかる．ここでは，AB=BC を示していく．AB=BC を示す推論には，(8)-(a),(10)-(a),(16)-(a) があり，どれを用いるかによって，3 通りの方法がある．

方法 1：これは，(1),(5)-(a),(8)-(a),(9)-(c),(16)-(b) を使った方法である．

AB と BC が対応する 2 つの三角形の合同を示す．AB と BC が対応する 2 つの三角形をつくるために，補助線 BD をひいてみる．すると，(3)-(b) より，∠ABD= ∠CDB となる．これでは，対応する辺が AB と CD，AD と BC になってしまうので不適切である．

そこで，補助線を点 B から AD 上，CD 上にひくことで，BA と BC が対応する三角形ができるとわかる．

点 B から AD 上，CD 上におろした垂線と AD,CD との交点を，それぞれ，H,K とする．リボンの幅が一定ということから性質 (1) を使うと，BH=BK,∠BHA= ∠BKC= 90° となる．補助線をひいた図を図 2 に示す．

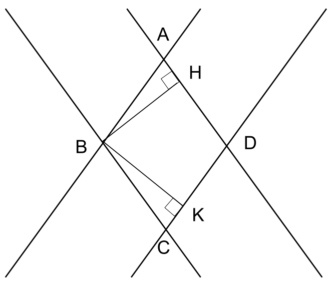

図 2 □ABCD に補助線をひいた図

∠BHA= ∠BKC= 90° より，直角三角形の合同条件が使えそうだが，導きたい性質が，直角三角形の斜辺であるため使えない．(16)-(b) より，∠BAH= ∠BCK である．三角形の内角の和は 180° なので，∠ABH= ∠CBK である．1 辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，(9)-(c) より，△ABH≡ △CBK である．したがって，(8)-(a) より，AB=BC が示された．

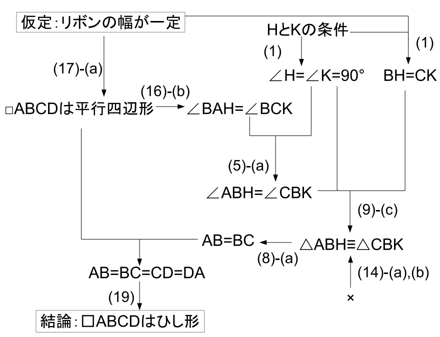

図 3 例題 1 の方法 1 のフローチャート

方法 2：これは，(1),(10)-(b),(12),(16)-(b) を使った方法である．

AB と BC が，等しい 2 辺になる二等辺三角形をつくれば，(10)-(b) より，AB=BC を示すことができる．まず，AC に補助線をひいてみる．次に，△ABC が二等辺三角形であることを示したい．二等辺三角形であるためには，(12) の前提を満たさなければならないが，∠BAC= ∠BCA であることがわからない．よって，補助線を AC にひくことは，不適切である．

そこで，図 2 の △ABH と △BCK を図 4 のように貼り合わせる．

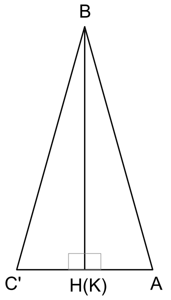

図 4 △ABH と △BCK を貼り合わせた図

∠H= ∠K= 90° より，点 C′,H,A は一直線上である．(16)-(b) より，∠BAH = ∠BCK であるので，△BC′A は二等辺三角形である．(10)-(a) より，BC′ =BA である．これは，すなわち，図 1 で，AB=BC ということが示されたことになる．

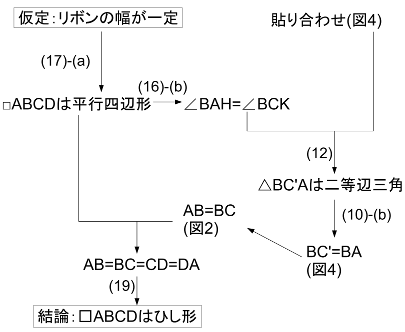

図 5 例題 1 の方法 2 のフローチャート

方法 3：これは，(1),(5),(16)-(b),(17)-(c) を使った方法である．

図 2 の △ABH と △BCK を図 6 のように貼り合わせる．

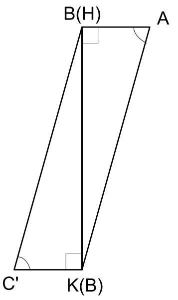

図 6 △ABH と △BCK を貼り合わせた図

方法 1 と同様に角を求めると，∠BC′K= ∠KAB,∠ABC′

$= \angle C'KA$ である．2 組の向かい合う角が，それぞれ等しいので，□$ABC'K$ は平行四辺形である．したがって，平行四辺形の性質より，$AK=BC'$ である．

これは，すなわち，図 1 で，AB=BC ということが示されたことになる．

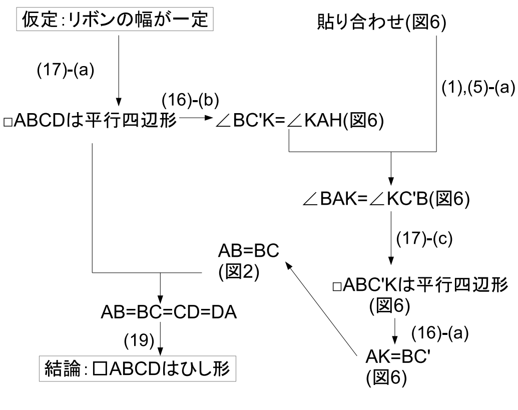

図 7 例題 1 の方法 3 のフローチャート

例題 2([3],p. 125 の 2)

図 8 で，点 X,Y は，対角線 AC を 3 等分することを証明しなさい．

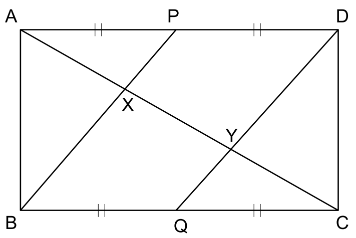

図 8 例題 2 の図

まず，仮定，既習の性質，結論を明確にする．

仮定：□ABCD は長方形，AP=PD=BQ=QC，
点 P,Q,X,Y は図 8 の通り

既習の性質：(0)〜(26)

結論：点 X,Y は，対角線 AC を 3 等分する

次に，証明の構想を記述する．この構想の大枠を図 9, 図 10 のフローチャートに示しておく．

まず，3 等分をどのように示せばよいか考える．AX=XY=YC となれば 3 等分であるが，既習の性質では直接それを示すことはできない．また，AX:XY:YC=1:1:1 となる性質もない．そこで，どの性質が使えそうか考える．図 8 をみると，△AYD,△CXB で (24) が使えると予想できる．(24) が使えるための条件は XP∥YD,YQ∥XB なので，つまり，PB∥DQ であればよい．すると，□PBQD で，(17)-(e) より，PB∥DQ である．よって，仮定の AP=PD=BQ=QC と (24) より，AX:XY=CY:YX=1:1 である．したがって，AX:XY=1:1,CY:XY=1:1 より，AX:CY=1:1 である．以上より，AX:XY:YC=1:1:1 となり，AX=XY=YC が示された．

しかし，AX:XY=1:1,CY:XY=1:1 より，AX:CY=1:1 であることをいうには少し不明確さがある．その場合は，

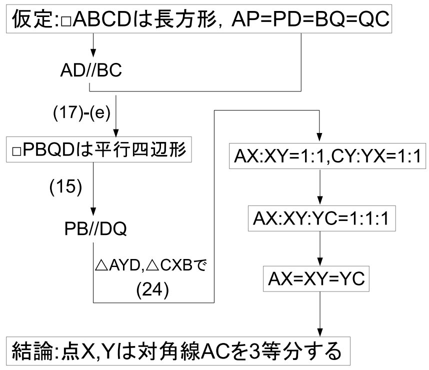

図 9 例題 2 のフローチャート 1

三角形の合同を示すと，うまく証明できる．(8)-(a) より，辺の長さが等しいことを明確にする．

まず，△AYD だけに注目し，さきほどの証明と同じ手順で AX:XY=1:1 を示す．

次に，△AXP と △CYQ で，(9)-(c) より，合同を示す．AP=CQ，(3)-(b) より，∠XAP= ∠YCQ，平行四辺形 PBQD の外角なので，∠XPA= ∠YQC である．よって，(9)-(c) より，△AXP≡ △CYQ である．よって，合同な三角形の性質より，AX=CY である．したがって，AX=XY=YC は明らかである．

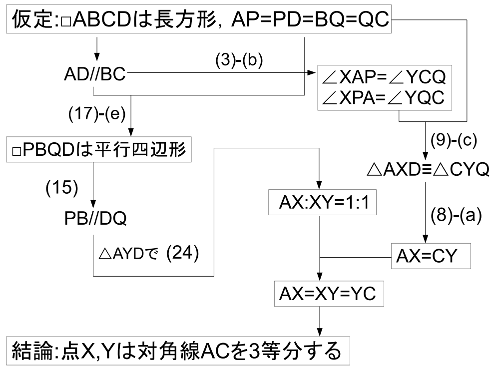

図 10 例題 2 のフローチャート 2

5 おわりに

証明の構成を既習の性質から組み立てることによって，さまざまな証明を作ることができた．教科書 ([1],[2],[3]) に載っていない方法でも証明ができるということは，学校教育の場であっても生徒が自由な発想で，自分なりの手順で，証明を組み立てることができるということである．これによって，生徒の想像力を高めることができると感じた．

参考文献

[1] 岡本和夫, 小関煕純, 森杉馨, 佐々木武, ほか 39 名,『未来へひろがる数学 1』, 啓林館, 大阪,2012.

[2] 岡本和夫, 小関煕純, 森杉馨, 佐々木武, ほか 39 名,『未来へひろがる数学 2』, 啓林館, 大阪,2012.

[3] 岡本和夫, 小関煕純, 森杉馨, 佐々木武, ほか 39 名,『未来へひろがる数学 3』, 啓林館, 大阪,2012.