推論を適切に選択するための数理的手法

M2012MM007 堀場康行
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究では，高等学校の数学における証明問題を，シークエント体系の手法 ([1]) に基づきながら数理的に分析した．

修士論文では，文献 [2 – 11] における，数学 I の「集合と命題」，数学 A の「整数の性質」，数学 B の「漸化式と数学的帰納法」を中心に扱い,「背理法を用いた証明問題」,「対偶法を用いた証明問題」,「剰余類を用いた証明問題」,「数学的帰納法を用いた証明問題」の 4 種類に見られるそれぞれの特徴をまとめた．文献 [2 – 11] の中の実例を,「背理法を用いる証明問題」と「対偶法を用いる証明問題」,「剰余類を用いる証明問題」と「数学的帰納法を用いる証明問題」の 2 組に分類し，証明すべき命題を，シークエント体系の手法 ([1]) に基づきながら各特徴との対応を考察し，最初に用いる推論の選択を決定した．

さらに，証明すべき命題に当てはまった特徴が，最初に選択する推論を決定していることを，文献 [2 – 11] の実例を用いて確かめた．当てはまった特徴から，最初に用いる推論の選択肢が複数存在する場合は，推論を適切に選択する方法を，実際にそれぞれの推論を選択し，証明することによって，どの証明方法が適切か調べた．その結果をシークエント体系の手法 ([1]) に基づきながら数理的に分析し，その推論が用いられた理由と，それぞれの推論を選択したときの長所，短所についてもまとめた．

本稿では,「背理法を用いた証明問題」,「対偶法を用いた証明問題」,「剰余類を用いた証明問題」,「数学的帰納法を用いた証明問題」の 4 種類に対し，その特徴と実際に解いた問題を挙げて，最初の 2 つおよび残りの 2 つの比較をそれぞれ行う．

2 背理法

背理法を用いた証明問題は，証明すべき命題を $\Gamma \to P$(Γ は仮定の集合，P は導きたい文) と表現したとき，以下の 5 つのうち少なくとも 1 つの特徴がある．

1. P が否定的な命題
2. $\neg P$(P でない) の言い換えができる命題
3. P が,「〜または〜」の形の命題
4. P の演算が Γ よりも少ない命題
5. Γ の元が少ない命題

以下に，実際に解いた証明問題を列挙する．

問題 R.1 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．

問題 R.2 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$3+\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．

問題 R.3 有理数 a，b が $a+b\sqrt{2}=0$ を満たすならば，$b=0$ であることを証明せよ．

問題 R.4 10 個の球を青，黄，赤の 3 つの箱のどれかに入れる．このとき，球が 4 個以上入っている箱があることを証明せよ．

問題 R.5 n を正の整数とする．n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ．

問題 R.6 a を自然数とする．x の方程式 $3x^2+6ax-2=0$ は整数解を持たないことを証明せよ．

問題 R.7 方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は有理数の解を持たないことを証明せよ．

問題 R.8 $4m+6n=7$ を満たす整数 m,n は存在しないことを証明せよ．

問題 R.9 素数は有限個でないことを証明せよ．

3 対偶法

対偶法を用いた証明問題は，証明すべき命題を $\Gamma \to P$ と表現したとき，以下の 5 つのうち少なくとも 2 つの特徴がある．

0. 「$Q \to P$」の形をしている命題 (Γ が 1 つの文の場合)
1. P が否定的な命題
2. $\neg P$ の言い換えができる命題
3. P が,「〜または〜」の形の命題
4. P の演算が Γ よりも少ない命題

以下に，実際に解いた証明問題を列挙する．

問題 C.1 整数 n について，n^2 が偶数ならば n は偶数であることを証明せよ．

問題 C.2 整数 a について，a^2+2 が 3 の倍数ならば，a は 3 の倍数ではないことを証明せよ．

問題 C.3 整数 m，n に対して，$m+n$ が 5 の倍数でないならば m または n は「5 の倍数でない」ことを証明せよ．

問題 C.4 2 つの整数 m,n に対して，積 mn が偶数ならば，m,n のうち少なくとも一方は偶数であることを示せ．

問題 C.5 a, b は実数とする．$a+b>0$ ならば $a>0$ または $b>0$ であることを証明せよ．

問題 C.6 α, β は実数とし，ある正の数 x, y に対して，$\alpha x+\beta y>0$ が成り立つならば，$\alpha>0$ または $\beta>0$ であることを証明せよ．

問題 C.7 n が自然数であるとき，2^n-1 が素数ならば，n も素数であることを証明せよ．

4 背理法と対偶法の比較

2 節と 3 節で挙げた，証明問題とその各特徴との対応を表 1 にまとめた．ただし，問題 R.1，問題 R.2 は，特徴 2 でなく特徴 1 が当てはまるとも解釈できる.「無理数である」の定義は,「有理数でない」からである．ここでは，文献にあった実際の証明文から，特徴 2 の形で解釈している．

	特 0	特 1	特 2	特 3	特 4	特 5
問 R.1			○			○
問 R.2	○		○			○
問 R.3	○				○	
問 R.4	○			○		○
問 R.5	○		○			○
問 R.6	○	○				○
問 R.7		○				○
問 R.8		○				○
問 R.9		○				○
問 C.1	○		○		○	
問 C.2	○	○			○	
問 C.3	○			○	○	
問 C.4	○		○	○	○	
問 C.5	○			○	○	
問 C.6	○			○	○	
問 C.7	○		○		○	

表 1 背理法と対偶法が用いられる命題の特徴

表 1 から分かるように，特徴 0 が当てはまる証明問題は，背理法では問題 R.2〜問題 R.6 の 5 題と，対偶法では問題 C.1〜問題 C.7 の 7 題であった．問題 R.2〜問題 R.6 は，問題 R.3 以外の問題には特徴 5 が当てはまっている．対偶法では，$Q\to P$ のかわりに $\neg P\to\neg Q$ を示すのが対偶法の性質であるので，対偶法を用いた全ての証明問題で，特徴 0 が当てはまった．

特徴 1 が当てはまる証明問題は，背理法では問題 R.6〜問題 R.9 の 4 題と，対偶法では問題 C.2 の 1 題であった．問題 R.6〜問題 R.9 は，特徴 1 の他に，特徴 5 が当てはまっている．問題 C.2 は，特徴 1 の他に，特徴 4 が当てはまっている．

特徴 2 が当てはまる証明問題は，背理法では問題 R.1〜問題 R.2，問題 R.5 の 3 題と，対偶法では問題 C.1，問題 C.4，問題 C.7 の 3 題であった．問題 R.1〜問題 R.2，問題 R.5 は，特徴 2 の他に，特徴 5 が当てはまっている．問題 C.1，問題 C.4，問題 C.7 は，特徴 2 の他に，特徴 4 が当てはまっている．

特徴 3 が当てはまる証明問題は，背理法では問題 R.4 の 1 題と，対偶法では問題 C.3〜問題 C.6 の 4 題であった．問題 R.4 は，特徴 3 の他に，特徴 5 が当てはまっている．問題 C.3〜問題 C.6 は，特徴 3 の他に，特徴 4 が当てはまっている．

よって，特徴 0 以外の特徴と，特徴 5 が当てはまったときは背理法を優先して，特徴 0 以外の特徴と，特徴 4 が当てはまったときは対偶法を優先していることが分かる．

また，問題 R.3 は特徴 4 が当てはまっているが，特徴 0 以外は当てはまっていない．このような問題は，背理法を用いて証明することができたが，問題数は少なかった．

ここでは背理法を用いた証明問題と対偶法を用いた証明問題をあげたが，対偶法で解くことができる証明問題は，全て背理法で解くことができた．そこで，対偶法を用いて解いた証明問題 C.1 を背理法を用いて解いてみる．

問題 C.1

整数 n について，n^2 が偶数ならば n は偶数であることを証明せよ．

実際の証明 n は奇数であると仮定する．n を奇数とするとき，ある整数 k を用いて，$n=2k+1$ と表される．したがって

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

ここで，$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である．これは，n^2 が偶数であることに矛盾する．

以上より，n^2 が偶数ならば n は偶数である．

このように，背理法を用いて解くと，矛盾を導く必要がある．対偶法を用いると，矛盾を導く必要がないので，証明の手順が少なくてすむ．しかし，対偶法を使うことができる命題の形は,「$Q\to P$」という形が決まっているので，多くの証明問題で仮定より結論の演算の回数が少ないときなど，対偶法を使える証明問題は限られてくる．それに比べて背理法は，背理法を使うことができる命題の形が限定されていないので，特徴が当てはまれば背理法で解くことができる．

また，$(\to w)$(「否定からは何でも導かれる」という推論) を用いて矛盾を導く問題は背理法を優先した方がよいときがある．以下に例題を載せる．

例題 1

互いに素である自然数 a,b に対して，a^2 と b^2 は互いに素であることを証明せよ．

この命題を $\Gamma\to P$ の形で表現すると

$$(a,b)\in\mathbb{N}^2, a \text{ と } b \text{ は互いに素} \to a^2 \text{と } b^2 \text{は互いに素} \qquad \cdots(1)$$

となる．(1) において，背理法を用いないで解くと，$(\to w)$ が必要になる．しかし，この推論に対応する日本語表現は，高等学校の数学では自然に感じられない．そのため，高等学校の数学教育においては，$(\to w)$ という推論の選択は，適切な選択であるとは考えにくい．また，(1) において，背理法を用いると $(\to w)$ が不要になることが分かった．よって，例題 1 においては，背理法を優先して用いた方が，適切な推論の選択をしたことになる．

背理法を用いた証明 a^2 と b^2 が互いに素でないと仮定すると，a^2 と b^2 は共通の素因数 p を持つので

$$a^2 = pm\ ,\ b^2 = pn\ \ (m, n \text{ は自然数})$$

と表すことができる．

ここで，a^2 は p の倍数なので，a も p の倍数であり，b^2 は p の倍数であるので，b も p の倍数である．これは，a と b が互いに素であることに矛盾する．

よって，a^2 と b^2 は互いに素である．

5 剰余類

剰余類を用いた証明問題は，証明すべき命題を $\Gamma \to P$ と表現したとき，以下の 4 つのうち少なくとも 2 つの特徴がある．

1. 自然数，整数についての命題
2. P が「〜の倍数である」,「〜の倍数でない」の形の命題
3. P が「〜の余りが〜である」の形の命題
4. 指数以外に変数が現れる命題

以下に，実際に解いた証明問題を列挙する．

問題 M.1 a は自然数とする．$a+1$ は 4 の倍数であり，$a+2$ は 7 の倍数であるとき，$a+9$ は 28 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.2 連続した 2 つの整数の積は 2 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.3 連続した 3 つの整数の積は 6 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.4 奇数の 2 乗から 1 を引いた数は，8 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.5 n は整数とする．このとき，$n^4 + 2n^2$ は 3 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.6 n が奇数のとき，$n^3 - n$ は 24 の倍数であることを証明せよ．

問題 M.7 3 で割ったときの余りが 2 であるような整数 a, b を考える．このとき，積 ab を 3 で割ったときの余りは 1 であることを証明せよ．

問題 M.8 n は整数とする．n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 であることを証明せよ．

6 数学的帰納法

数学的帰納法を用いた証明問題では，証明すべき命題を $\Gamma \to P$ と表現したとき，以下の 4 つのうち少なくとも 1 つの特徴がある．

1. 自然数 (整数) についての命題
5. P に，Σ あるいは，それと同等な表現が現れる命題
6. Γ に，数列の漸化式が現れる命題
7. 指数に変数が現れる命題

以下に，実際に解いた証明問題を列挙する．

問題 I.1 n を自然数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

問題 I.2 n を自然数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

問題 I.3 n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$3^n > 8n$$

問題 I.4 2 以上のすべての自然数について，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3} < 2 - \frac{1}{n^2}$$

問題 I.5 $a > 0$ で n は自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

問題 I.6 n は自然数とする．$5^n - 1$ は 4 の倍数であることを証明せよ．

問題 I.7 n は自然数とする．$2^{n+1} + 3^{2n-1}$ は 7 の倍数であることを証明せよ．

問題 I.8 n を自然数とする．$8^n - 7n - 1$ は 49 の倍数であることを証明せよ．

問題 I.9 a, b は実数で $a + b = 2, ab = -6, a^2 + b^2 = 16$, $a^3 + b^3 = 44$ を満たしている．n を 2 以上の自然数とするとき，$a^n + b^n$ は 4 の倍数であることを示せ．

問題 I.10 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$，$6a_{n+1} = a_n^2 + 9$ によって定義する．このとき，すべての自然数 n に対して $1 \leq a_n < a_{n+1} < 3$ であることを証明せよ．

問題 I.11 漸化式 $a_1 = 4$，$a_{n+1} = 3a_n^2 + 4a_n + 3$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定まる整数の数列 $\{a_n\}$ を考える．このとき，$a_n - 4$ が 7 で割り切れることを証明せよ．

7　剰余類と数学的帰納法の比較

5 節と 6 節で挙げた，証明問題とその各特徴との対応を表 2 にまとめた．

	特 1	特 2	特 3	特 4	特 5	特 6	特 7
問 M.1	○	○		○			
問 M.2	○	○		○			
問 M.3	○	○		○			
問 M.4	○	○		○			
問 M.5	○	○		○			
問 M.6	○	○		○			
問 M.7	○		○	○			
問 M.8	○		○	○			
問 I.1	○				○		
問 I.2	○				○		○
問 I.3	○						○
問 I.4	○				○		
問 I.5	○						○
問 I.6	○	○					○
問 I.7	○	○					○
問 I.8	○	○		○			○
問 I.9	○						○
問 I.10	○					○	
問 I.11	○					○	

表 2　剰余類と数学的帰納法が用いられる命題の特徴

表 2 から分かるように，特徴 1 は全ての問題に当てはまった．自然数や整数の範囲の証明問題では，剰余類や数学的帰納法による証明が有効であることが分かった．

特徴 2 が当てはまる証明問題は，剰余類では問題 M.1〜問題 M.6 の 6 題と，数学的帰納法では問題 I.6〜問題 I.8 の 3 題であった．問題 M.1〜問題 M.6 は，特徴 2 の他に，特徴 4 が当てはまっている．問題 I.6〜問題 I.8 は，特徴 2 の他に，特徴 7 が当てはまっている．

特徴 3 が当てはまる証明問題は，剰余類の問題 M.7〜問題 M.8 の 2 題であった．問題 M.7〜問題 M.8 は，特徴 3 の他に，特徴 4 が当てはまっている．

よって，特徴 2，3 のどちらかと，特徴 4 が当てはまったら，剰余類を優先していることが分かる．

特徴 5 が当てはまる証明問題は，数学的帰納法の問題 I.1〜問題 I.2，問題 I.4 の 3 題であった．特徴 6 が当てはまる証明問題は，数学的帰納法の問題 I.10〜問題 I.11 の 2 題であった．

よって，特徴 5，6 は数学的帰納法にみられる特有の特徴であることが分かった．

また，問題 I.8 では，特徴 2，4，7 が当てはまっている．問題 I.8 は数学的帰納法を用いた証明問題なので，特徴 4 と特徴 7 が当てはまったときは，特徴 7 を優先させて，数学的帰納法を用いることが分かった．

ここでは「剰余類を用いた証明問題」と「数学的帰納法を用いた証明問題」をあげたが，剰余類で解くことができる証明問題は，全て数学的帰納法でも解くことができた．そこで，剰余類を用いて解いた証明問題 M.5 を数学的帰納法を用いて解いてみる．

問題 M.5

n は整数とする．このとき，n^4+2n^2 は 3 の倍数であることを証明せよ．

実際の証明　n は整数であるが，$n=0$ のときは明らかであることと，$(-n)^4+2(-n)^2=n^4+2n^2$ であることから，n を自然数として証明すれば十分である．

実際の証明は要約のみにする．

(i)$n=1,2,3$ のときに題意が成り立つ

(ii)$n=k$ で題意が成り立つ ⇒ $n=k+3$ でも成り立つの形で示す．

このように，数学的帰納法を用いる場合でも，3 の剰余で場合分けをすることによって解くことができる．同様にして，剰余類を用いた証明問題は数学的帰納法を用いて解くことができる．しかし，剰余類を用いる解き方に比べると，計算の量が多くなってしまうので，剰余類を用いることができる証明問題の場合は，剰余類を用いて解いた方がよい．

8　おわりに

本研究では，シークエント体系の手法 ([1]) を用いて，証明すべき命題に当てはまる特徴と証明における最初の推論との関係を理解できた．この結果を高等学校の数学教育へと応用していきたいと思う．そして，今後も証明すべき命題から，シークエント体系の手法で表現することを続けていき，他の分野での証明問題の特徴も研究していきたいと思う．

参考文献

[1] 佐々木克巳：『シークエント体系の証明図から実証明を作る方法』，アカデミア　情報理工学編　第 11 巻 pp.35-54，2011.

[2] 佐々木隆宏：『佐々木隆宏の数学の論証力・答案作成力が面白いほど身につく本』，中経出版，東京，2007.

[3] 佐々木隆宏：『佐々木隆宏の整数問題が面白いほどとける本』，中経出版，東京，2011.

[4] 高橋陽一郎　他 33 名：『数学 I』，新興出版社啓林館，大阪，2012.

[5] 高橋陽一郎　他 33 名：『新編数学 I』，新興出版社啓林館，大阪，2012.

[6] チャート研究所：『新課程チャート式基礎からの数学 I+A』，数研出版，東京，2012.

[7] チャート研究所：『新課程チャート式解法と演習数学 II+B』，数研出版，東京，2005.

[8] 坪井俊　他 13 名：『数学 B』，数研出版，東京，2013

[9] 俣野博/河野俊丈　他 27 名：『数学 I』，東京書籍，東京，2012.

[10] 俣野博/河野俊丈　他 27 名：『数学 B』，東京書籍，東京，2013.

[11] 山本慎　他 10 名：『最新数学 I』，数研出版，東京，2012.