

多項式によるモデル予測制御器の設計法とその性質

M2012MM008 市原寛之

指導教員：大石泰章

1 はじめに

モデル予測制御は産業界で最も広く使われている制御法の一つであり、制約を持つ制御対象にも適用することができる。Bemporad ら [1] は、最適な入力をあらかじめ現在の状態の関数として求めておくことを提案し、これによってモデル予測制御は応答の速い制御対象にも適用できるようになった。しかし最適なモデル予測制御器は、状態の区分線形な関数になり、区分の数が大きい場合に、その計算は時間がかかり、実装も難しくなる。そこで多項式を使って、近似をすることにより実用的なモデル予測制御器を作るという方法がある [2, 3]。しかしこの方法は適用例が少なく、その実用性には疑問が残る。

以上を踏まえ、本研究ではこの方法を今までと異なる制御対象に適用し、その検証を行う。また最適なモデル予測制御器を求めるソフトウェアとして定評のある multi-parametric toolbox [4] を使い、多項式近似法との比較を行う。

2 モデル予測制御器の多項式近似法

2.1 定式化

本研究では次の線形離散時間システムを制御対象とする：

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、 $u(t)$ は次の制約を満たす：

$$-1 \leq u(t) \leq 1.$$

モデル予測制御では時刻 t における入力 $u(t)$ は以下の手順で定める。まず現在時刻における制御対象の状態 $x(t)$ を観測し、これを以下の最適化問題 O_x のパラメータ x に代入して最適解 $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ を求める。ただしここでは予測ステップ数を 5 としている。そして u_0 を $u(t)$ として制御対象に入力する。時刻 $t+1$ になったら再び制御対象の状態を観測し、以下同様に繰り返す。考える最適化問題は以下の通り：

$$\begin{aligned} O_x : \text{minimize} \quad & \sum_{k=0}^4 x_k^T x_k + u_k^2 \\ \text{subject to} \quad & x_0 = x, \\ & x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4), \\ & -1 \leq u_k \leq 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

表記を簡単にするため問題 O_x の目的関数を $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ のみを使って表し、さらにこれを平方完成して次の標準形 P_x に変形をする：

$$\begin{aligned} P_x : \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} z^T H z \\ \text{subject to} \quad & Gz \leq f + Sx \end{aligned}$$

O_x の最適化変数 $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ と P_x の最適化変数 z とはアフィン変換の関係にあり、 P_x の最適解が得られれば O_x の最適解が得られる。

文献 [3] では P_x の Lagrange 乗数 λ を x の多項式に限定して $\lambda(x)$ と書き、以下の最適化問題を考える：

$$\begin{aligned} S : \text{minimize} \quad & \int_X \lambda(x)^T (f + Sx + GH^{-1}G^T \lambda(x)) dx \\ \text{subject to} \quad & -GH^{-1}G^T \lambda(x) \leq f + Sx \quad (\forall x \in X), \\ & \lambda(x) \geq 0 \quad (\forall x \in X) \end{aligned}$$

ただし X は状態空間中の制御器を求める状態の集合で、ここでは

$$X = \{(x_1 \ x_2)^T \mid -5 \leq x_1 \leq 5, -5 \leq x_2 \leq 5\}$$

とする。この問題の実行可能解 $\lambda(x)$ に対して $z(x) = -H^{-1}G^T \lambda(x)$ によって多項式 $z(x)$ を定めると、 $z(x)$ は任意の $x \in X$ に対して P_x の実行可能解となり、その時の S の目的関数の値は $z(x)$ が達成する P_x の目的関数値と P_x の最小値との差を X 上で積分したものの上界となる。従って問題 S を解けば X 中の x に対するモデル予測制御器の多項式による近似を誤差評価つきで求めることができる。

2.2 解法

問題 S は次のようにして解ける。問題 S の目的関数は次のように変形できる。まず $\lambda(x)$ は x の多項式であるから、 $\lambda(x) = \Lambda \mu(x)$ と書ける。ただし Λ は $\lambda(x)$ の係数、 $\mu(x)$ は $\lambda(x)$ の単項式を並べた列ベクトルである。この表現を使うと、

$$\begin{aligned} & \int_X \lambda(x)^T [f + Sx + GH^{-1}G^T \lambda(x)] dx \\ &= \int_X [\mu(x)^T \Lambda^T f + \mu(x)^T \Lambda^T Sx + \\ & \quad \mu(x)^T \Lambda^T GH^{-1}G^T \Lambda \mu(x)] dx \\ &= \xi^T \Lambda^T f + \text{tr}(S \tilde{\Xi} \Lambda^T) + \text{tr}(H^{-\frac{1}{2}} G^T \Lambda \Xi \Lambda^T G H^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

ここで、 $\xi^T, \tilde{\Xi}, \Xi$ はそれぞれ $\mu(x)^T, x\mu(x)^T, \mu(x)\mu(x)^T$ を X の範囲で積分したものである。この目的関数の最小

化は次のように表現することができる:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \xi^T \Lambda^T f + \text{tr}(S \Xi \Lambda^T) + \text{tr} V \\ & \text{subject to} \quad \begin{pmatrix} V & H^{-\frac{1}{2}} G^T \Lambda \Xi \\ \Xi \Lambda^T G H^{-\frac{1}{2}} & \Xi \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

問題 S の制約条件はすべての $x \in X$ に対して満たされなくてはならないので扱うのが難しい。しかし、2 乗和多項式行列 (例えば [5]) を使うことで扱うことができる。

2 乗和多項式行列とは、変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に関する多項式行列 $F(x)$ で、他の多項式行列 $R(x)$ を用いて $F(x) = R(x)^T R(x)$ と書くことができるようなものを言う。 $F(x)$ が 2 乗和多項式ならば任意の x に対して $F(x)$ は半正定値となる。

多項式行列 $F(x)$ が領域 X 上で半正定値となるための十分条件を 2 乗和多項式を使って表すことを考える。領域 X は有界閉集合で多項式 $g_1(x), \dots, g_l(x)$ によって

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, \dots, g_l(x) \geq 0\}$$

と表せるとする。そして、与えられた多項式行列 $F(x)$ が、2 乗和多項式行列 $S_0(x), \dots, S_l(x)$ を使って $F(x) = S_0(x) + g_1(x)S_1(x) + \dots + g_l(x)S_l(x)$ と表せるとする。これは $F(x) \geq 0 (\forall x \in X)$ であるための十分条件である。さらに、次の定理も成り立つ。

定理 1 多項式 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_l(x)$ がある緩い条件を満たす時、 $F(x) \succ 0 (\forall x \in X)$ ならば、

$$F(x) = S_0(x) + g_1(x)S_1(x) + \dots + g_l(x)S_l(x)$$

を満たす 2 乗和多項式行列 $S_0(x), S_1(x), \dots, S_l(x)$ が存在する。

2 乗和多項式を使って、問題 S の制約条件をその十分条件で置き換える。特に問題 S の場合 $g_1(x) = (x_1 + 5)(5 - x_1)$, $g_2(x) = (x_2 + 5)(5 - x_2)$ とすればよい。この条件を使うことで問題 S を近似的に解くことが可能となる。また 2 乗和多項式の次数が高いほど近似精度がよくなる。

3 多項式近似法の適用

3.1 問題点と考察

問題 S をそのまま解いたところ、目的関数の値は -1.146×10^{11} となった。問題 S の目的関数の値は $z(x)$ が達成する P_x の目的関数値と P_x の最小値との差を X 上で積分したものの上界となるので、零以上の値とならなければならない。そこで数値誤差の関与が疑われる。この事が起きた原因としては、行列 Ξ の各成分にあると考えられる。

定義に従って計算すると、 Ξ の (1,1) 成分は

$$\int_{-5}^5 \int_{-5}^5 1 dx_1 dx_2 = 100$$

である。 Ξ の (28,28) 成分は

$$\int_{-5}^5 \int_{-5}^5 x_1^{12} dx_1 dx_2 = 1.878 \times 10^9 \quad \text{である。}$$

このように Ξ の各成分に大小の差があるために、最適化問題が数値的に解きにくくなり、前述のような結果になったと考えられる。この点を明らかにするために本研究では Ξ の条件数を調べてみた。

3.2 条件数

状態の範囲が $[-5, 5] \times [-5, 5]$ の場合の Ξ の条件数は 1.0870×10^8 となり、 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ の場合は 5.2765×10^3 となった。

この 2 つの状態による Ξ の条件数の違いは約 10^5 であり、非常に大きい。条件数は大きければ大きいほど数値計算上扱いづらくなる。この事が理由で領域 X が $[-5, 5] \times [-5, 5]$ の場合に数値誤差が生じたと考えられる。

3.3 対策とその結果

このことを解決するため、 $\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{5}$, $\tilde{x}_2 = \frac{x_2}{5}$ という変数変換を問題 P_x に適用した。変数変換後の問題 S は次の形となる:

$$\begin{aligned} S : \text{minimize} \quad & \int_{\tilde{X}} \lambda(\tilde{x})^T (f + 5S\tilde{x}) + GH^{-1}G^T \lambda(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \text{subject to} \quad & -GH^{-1}G^T \lambda(\tilde{x}) \leq f + 5S\tilde{x} \quad (\forall \tilde{x} \in \tilde{X}) \\ & \lambda(\tilde{x}) \geq 0 \quad (\forall \tilde{x} \in \tilde{X}) \end{aligned}$$

ただし

$$\tilde{X} = \{(\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2)^T | -1 \leq \tilde{x}_1 \leq 1, -1 \leq \tilde{x}_2 \leq 1\}.$$

上記の変数変換を行った結果、問題 S を解くと値は 1509 となった。前述の結果と比べると絶対値は小さくなり正の値となった。領域 X を分割すればさらに目的関数を小さくすることができる。例えば X を $[-5, 0] \times [0, 5]$, $[0, 5] \times [-5, 0]$, $[-5, 0] \times [-5, 0]$, $[0, 5] \times [0, 5]$ の 4 つの領域に分割すると目的関数値は 3.7042 となる。この場合に得られたモデル予測制御器を図 1 に示す。 X の領域の分割の上にそれぞれ入力関数 $u(t)$ が描かれている。図 1 は $-1 \leq u(t) \leq 1$ となっており妥当な結果が得られたと言える。

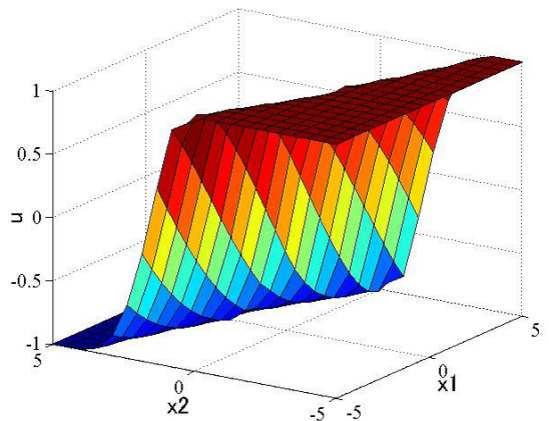


図 1 多項式近似法によるモデル予測制御器

4 最適なモデル予測制御器

multi-parametric toolbox[4] は最適なモデル予測制御器を求めるソフトウェアとして定評があるものである。このソフトウェアを2章の制御対象に適用したところ図2の制御器を得た。図1と似ており多項式近似法は十分な近似ができていたことがわかった。この場合の制御器は状態 X の区分1次関数であり、図3に求めた区分を示す。図3の領域1つ1つの上にそれぞれ1次関数が定義される。図3を見ると、予測ステップ数が5と小さい場合にも分割数が32と多くなることが分かった。

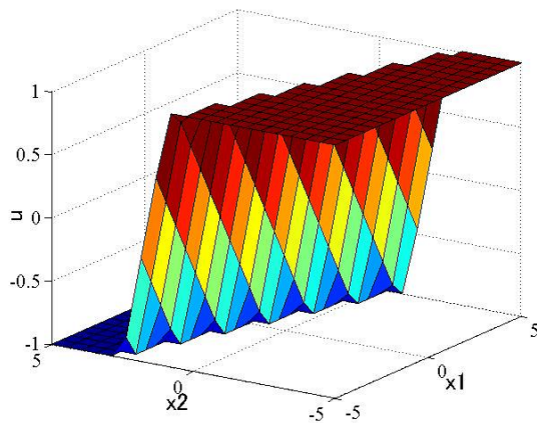


図2 最適なモデル予測制御器

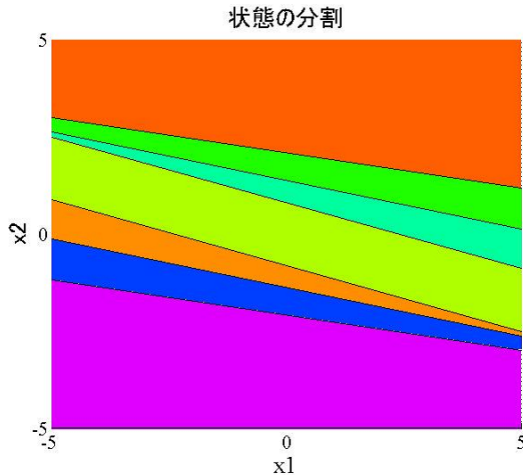


図3 状態の分割

5 シミュレーション

5.1 4分割の場合のシミュレーション

領域 X を $[-5, 0] \times [0, 5]$, $[0, 5] \times [-5, 0]$, $[-5, 0] \times [-5, 0]$, $[0, 5] \times [0, 5]$ のように4分割して、多項式近似法を適用する。得られたモデル予測制御器を使って、初期値を $(1.8 \ 1.8)^T$ とした時のシミュレーション結果を図4に示す。実線が multi-parametric toolbox における初期値の軌道で、破線が多項式近似法における初期値の軌道である。

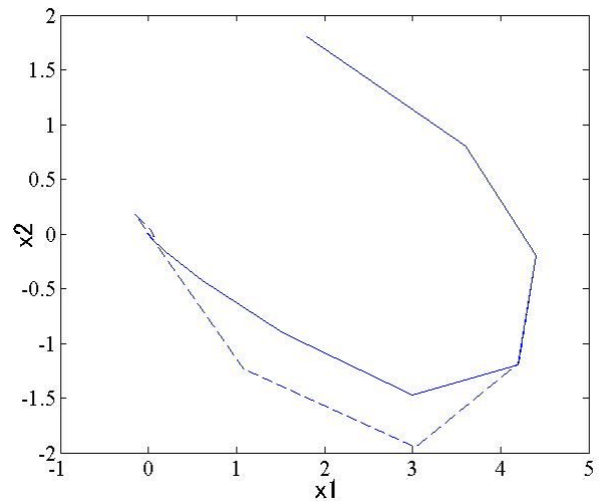


図4 シミュレーションにおける比較

このシミュレーションでは原点に近づくにつれ近似が悪くなる。また原点の周りでの破線の動きに違和感がある。そこで今度は分割を9つにし、近似を行った。使った分割は $[-5, -1.7] \times [-5, -1.7]$, $[-5, -1.7] \times [-1.7, 1.7]$, $[-5, -1.7] \times [1.7, 5]$, $[-1.7, 1.7] \times [-5, -1.7]$, $[-1.7, 1.7] \times [-1.7, 1.7]$, $[-1.7, 1.7] \times [1.7, 5]$, $[1.7, 5] \times [-5, -1.7]$, $[1.7, 5] \times [-1.7, 1.7]$, $[1.7, 5] \times [1.7, 5]$ である。この分割によって得られた目的関数値は2.3228である。目的関数値は4分割の場合に比べ小さくなった。得られた多項式モデル予測制御器を図5に示す。

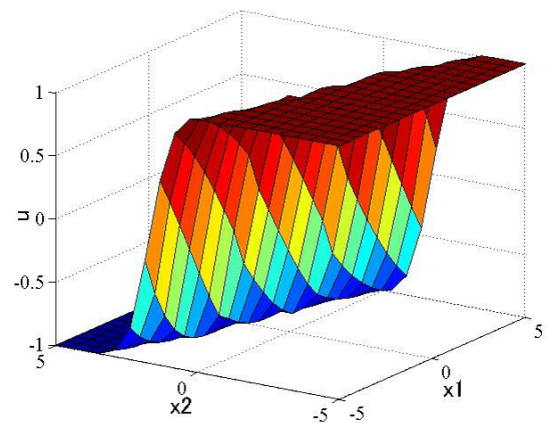


図5 多項式近似法によるモデル予測制御器

そして、このモデル予測制御器を使い、再びシミュレーションを行った。実線が multi-parametric toolbox における初期値の軌道で、破線が多項式近似法における初期値の軌道である。

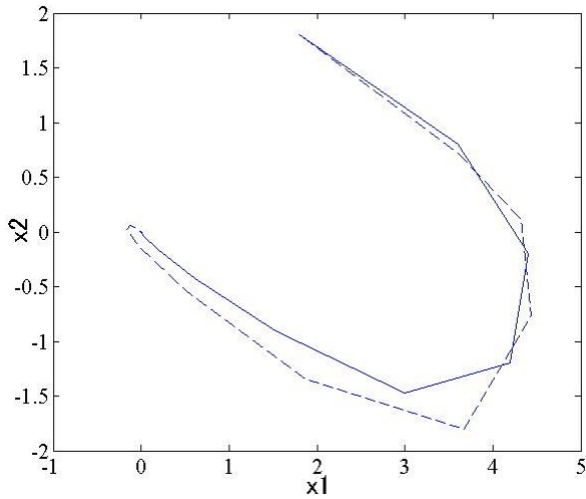


図6 シミュレーションにおける比較 (9分割の場合)

目的関数値は4分割の場合に比べ小さくなっており、先ほどより良い近似ができています。ただまだ近似精度は十分ではない。

6 実行時間の測定

本研究では多項式モデル予測制御器の時間に関する性質を調べるために、様々な予測ステップ数に対してモデル予測制御器を出力するまでの実行時間の測定を行った。結果は図7の通りである。

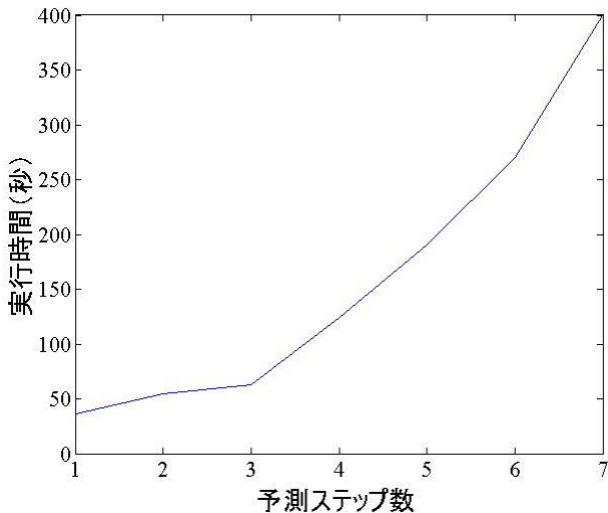


図7 ステップ数の変動による実行時間の変化

このグラフから、多項式近似法の実行時間は長く、しかもステップ数が増えると共に、実行時間も急速に増えることがわかる。2乗和多項式は一般に大きな計算量を必要とすることが知られており、上の結果はこのことの反映であると思われる、改善が必要なことが分かった。

7 おわりに

本研究ではモデル予測制御器の多項式近似法を文献とは異なる制御対象に適用した。数値誤差の対策を行い、多項式モデル予測制御器を出力した。さらに、multi-parametric toolbox で求めた最適なモデル予測制御器との比較を行った。制御則の比較では十分良い近似が得られているように見えたが、シミュレーションを行ったところ、あまり良い近似となっていなかった。そのため領域の分割数を増やし、再びシミュレーションを行ったところ、若干の改善は見られたが依然として十分な精度は得られなかった。分割数を増やすことによって目的関数値が小さくなったことより、分割数をさらに増やすと近似精度がさらに良くなると思われる。また多項式モデル予測制御器を出力するまでの実行時間の測定を行った結果、ステップ数が増えるごとに実行時間は増え、多項式近似法は実行時間が長く改善が必要なが分かった。2乗和多項式は一般に大きな計算量を必要とすることが知られており、この結果はこのことの反映であると思われる。

参考文献

- [1] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos: The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, vol. 38(2002), no. 1, pp. 3–20.
- [2] Y. Oishi: Direct design of a polynomial model predictive controller. *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, June 2012, pp. 621–626.
- [3] Y. Oishi: Simplified approaches to polynomial design of model predictive controllers. *Proceeding of the 2013 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, Hyderabad, India, August 2013, pp. 960–965.
- [4] M. Kvasnica, P. Grieder, and M. Baotic: Multi-parametric toolbox (MPT). <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>, 2004.
- [5] 大石泰章: 2乗和多項式に基づくロバスト制御系設計。計測自動制御学会セミナーテキスト: 実践的な制御系設計: (ポスト) ロバスト制御の最前線, 大阪, 2007年11月, pp. 71–88.