

ロバスト性を考慮した位置決め制御系における H_∞ ループ整形を用いた摩擦補償

M2012MM025 内藤正和

指導教員：高見勲

1 はじめに

本研究では H_∞ ループ整形とポリトープ表現を用いて摩擦と不確かさが含まれるプラントの精密位置決め制御を行う。一般に精密位置決め制御を行うためには目標値に定常偏差なく追従することや、オーバーシュートが発生しない等の仕様を満たす必要があるが、位置決め性能を劣化させる原因の一つに機械要素の摩擦特性が挙げられる [1]。摩擦の影響として、定常偏差やオーバーシュート、リミットサイクルなどのスティックスリップ現象が発生している。

本研究ではモータとボールねじを組み合わせたボールスクリーンシステムを制御対象として扱い、その際に制御系設計手法として H_∞ ループ整形を用い、位置決め制御を実現する。 H_∞ ループ整形は McFarlane ら [2] により提唱された制御系設計手法であり、制御対象の開ループ伝達関数の前後に重み関数を付加し、設計を行うことができる。また H_∞ ループ整形によって得られた制御器は LQ 制御とオブザーバの併用システムであることから [3]、LQ 制御の評価関数を用いた制御対象の応答性改善が期待できる [4]。

我々は、摩擦補償の提案法として、摩擦の周波数特性に着目し、 H_∞ ループ整形を用いた周波数整形によって摩擦補償を行う。外乱である摩擦を周波数の観点から解析し、摩擦の影響が支配的に表れる周波数帯域が推定できれば、周波数整形を行うことで摩擦補償の特性を持った制御器を設計できる。本研究では静止摩擦とスティックスリップ現象が支配的に表れる周波数帯域を推定し、その周波数帯域に対して外乱抑制特性を持つ制御器を H_∞ ループ整形で設計した。そして H_∞ ループ整形の際に用いられる重み関数に、外乱抑制、目標値追従機能、応答性改善という3つの効果が現れるように意味付けを行うことで、仕様を満たす制御系設計を行った。[6]

また、実際の問題を想定し、制御対象であるボールスクリーンシステムにおいてテーブルに重りを載せる事によりパラメータに不確かさを持たせることを考える。ロバスト性の補償として H_∞ ループ整形と共に正規化規約分解表現を用いる手法 [4][7] が一般的であるが、本研究では提案法として正規化規約分解表現でなくポリトープ表現を用いた設計を行った。設計した制御器の有用性をシミュレーションにより確認する。

2 制御対象のモデル化と特性

2.1 ボールスクリーンシステム

本研究では、現在工作機械で多く採用されている位置決め制御系であるボールスクリーンシステムを制御対象とする。実験装置は、DC サーボモータ (定格出力 110[W]、

定格トルク 0.221[Nm]) の駆動力をボールスクリーン (全長 100mm, ピッチ 12mm) を介して、負荷に伝達し、位置決めを行う。なお、負荷位置の測定には光学式リニアエンコーダ (分解能 0.1 μ m) を用いる。

3 制御対象のモデル化

モータ角を θ [rad]、負荷の変位を y [m]、入力を $u(t)$ をモータの印加電流とすると、運動方程式は式 (1) となる。ボールスクリーンシステムの各パラメータを表 1 に示す。

$$M\ddot{y}(t) + F_v\dot{y}(t) = \frac{K_t}{R}u(t) \quad (1)$$

ここで、状態量を $x(t) = [y(t) \ \dot{y}(t)]^T$ とすると、ボール

表 1 Parameters of ball-screw system

torque constant K_t	0.21[Nm/A]
moment of inertia J	1.02×10^{-4} [Nms ²]
spring constant K	1.0×10^8 [N/m]
coefficient of viscosity F_v	5.0×10^3 [Ns/m]
mass of table M	0.49[kg]
ball-screw constant R	6.37×10^{-4} [m/rad]

スクリーンシステムの状態空間表現は式 (2) のように表すことができる。本研究では式 (2) を用いて制御系設計を行う。small

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{F_v}{M} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{RM} \end{bmatrix} u(t) \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

3.1 非線形摩擦の周波数特性

スティックスリップ現象は静止 (スティック) と滑り (スリップ) を繰り返す非線形な現象であるが、本研究ではこの現象を周波数の観点から検証する。つまりスティックスリップ現象をある一定の周波数を持って振動を繰り返す現象ととらえることで、非線形な摩擦の振舞いを周波数帯域にて解析する。そうすることでスティックスリップ現象が支配的に表れる周波数帯域を推定でき、その周波数帯域を抑制することで摩擦補償を実現できる。

静止状態は周波数 0 付近の動きであり、滑り状態は動作してから何らかの周波数成分を持つと考えられる。そして非線形摩擦の影響が顕著に現れる周波数帯域が存在すれば、その帯域の摩擦を考慮に入れた制御器を周波数整

形を用いることで設計できる．本研究では様々な電流を開ループで入力し，非線形摩擦の周波数特性を解析する．ここで，0.33[A]の電流を開ループで入力した実験結果図??を基に解析手順を示す．スティックスリップ現象が支配的に現れる周波数帯域を推定するために図??においてスティックスリップ現象が発生している部分のデータだけを図2の様に抜き取る．

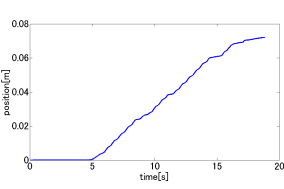


図1 Stick slip motion

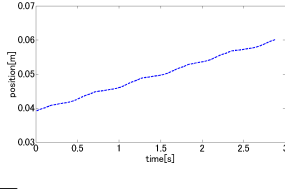


図2 part of Experiment of friction phenomenon

図2のデータを最小二乗法を用いて2次の多項式関数に近似したものを図3に示す．そして，図3の2本のデータの偏差を取ったものを図4に示す．

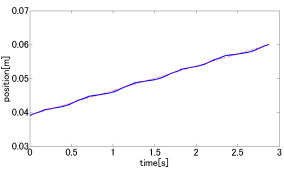


図3 Approximate data

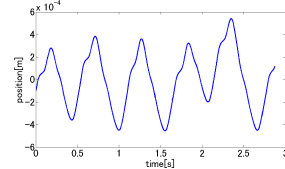


図4 Deviation

この様にしてスティックスリップ現象を図4の様に振動現象ととらえることにより周波数解析を行う．図4の周波数解析を行った結果を図5に示す．

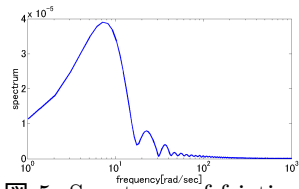


図5 Spectrum of friction

同様の手順で様々な電流を開ループで入力し，非線形摩擦の周波数特性を解析した結果を以下に示す．

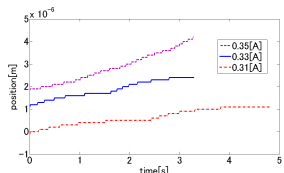


図6 Stick slip motion

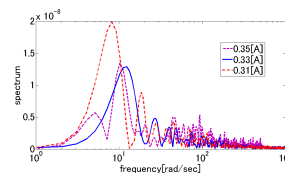


図7 Spectrum

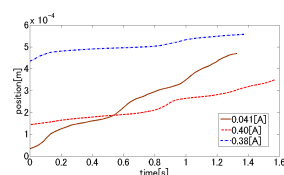


図8 Stick slip motion

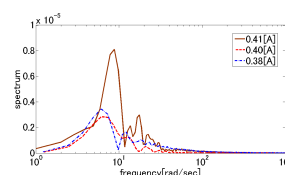


図9 Spectrum

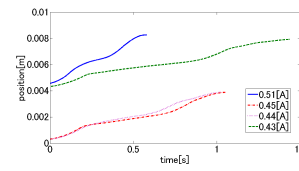


図10 Stick slip motion

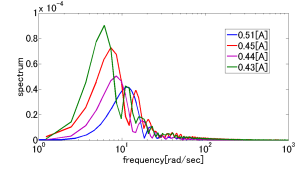


図11 Spectrum

図6, 8, 10は負荷のスティックスリップ現象を表しており，その主成分周波数は図7, 9, 11から，8[rad/sec]から13[rad/sec]近傍に存在することが確認できる．このことから摩擦の影響を抑制するには，静止摩擦の支配する静止状態とスリップ状態の2つの周波数帯域での補償を行うことが必要となる．また目標値追従性能は基本的に周波数0付近の低周波数で効果のある補償を必要とすることから，本研究では，目標値追従性能と静止摩擦の補償を低周波数帯域で，スリップ現象の補償を高周波(本研究の場合10[rad/sec]近傍)帯域で行うこととする．この周波数帯域の摩擦の影響を H_∞ ループ整形の設計の際に考慮に入れ，位置決め精度向上を図る．

4 位置決め制御系設計

4.1 H_∞ ループ整形

本研究では，McFarlaneら[2]によって提案された H_∞ ループ整形を用いて制御系設計を行う． H_∞ ループ整形では設計モデル $P_s(s) = \{A_d B_d C_d D_d\}$ に対する制御器 $C_\infty(s)$ は，式(3)(4)のリカッチ方程式の正定解 X, Z を用いることで，式(5)のように与えられることが知られている．

$$\begin{aligned} (A_d - B_d S^{-1} D_d^T C_d)^T X + X(A_d - B_d S^{-1} D_d^T C_d) \\ - X B_d S^{-1} B_d^T X + C_d^T R^{-1} C_d = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (A_d - B_d S^{-1} D_d^T C_d) Z + Z(A_d - B_d S^{-1} D_d^T C_d)^T \\ - Z C_d^T R^{-1} C_d Z + B_d S^{-1} B_d^T = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$R = I + D_d D_d^T, S = I + D_d^T D_d$$

$$C_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_d + B_d F + H(C_d + D_d F)}{B_d^T X} & \frac{H}{-D_d^T} \end{array} \right] \quad (5)$$

$$F = -S^{-1}(D_d^T C_d + B_d^T X), L = (1 - \gamma^2)I + XZ,$$

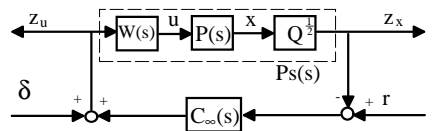
$$H = \gamma^2(L^T)^{-1} Z C_d^T, \gamma > (1 + \lambda_{max}(XZ))^{\frac{1}{2}}$$

ここで，本研究では制御系設計を行う上で，目標値追従機能を満足し，かつ摩擦を補償することでその影響による定常偏差，オーバーシュート，スティックスリップ現象を解消しなければならない．そこで，摩擦 δ と目標値入力 r から，プラント $P(s)$ の入力 u と状態 x までの影響を小さくする制御器 $C(s)$ を設計する問題を考える． δ, r から x, u までの伝達関数行列の H_∞ ノルムの最小化問題は式6のように与えられる． I は単位行列である．

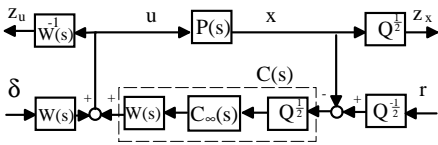
$$\left\| \left[\begin{array}{c} I \\ C(s) \end{array} \right] (I + P(s)C(s))^{-1} \left[\begin{array}{c} I \\ P(s) \end{array} \right] \right\|_\infty < \gamma \quad (6)$$

4.2 重み関数の設定

本研究では図12(a)に示すように $W(s)$ と定数行列 Q を重み関数として使用する．また図12(a)は図12(b)の等価変換を表し，最終的な制御器は $C_\infty(s)$ に対して再度



(a) Closed loop system



(b) Equivalent closed loop system

図 12 H_{∞} loop shaping method

重み関数を結合することにより, $C(s) = W(s)C_{\infty}(s)Q$ を得る.

ここで図 12 より, 外部入力 r, δ から評価出力 Z_u, Z_x までの伝達関数行列は式 (7) のように求めることができる.

$$\begin{bmatrix} z_u \\ z_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{z_u r}(s) & P_{z_u \delta}(s) \\ P_{z_x r}(s) & P_{z_x \delta}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \delta \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$P_{z_u r}(s) = W^{-1}(s)(1 + C(s)P(s))^{-1}C(s)Q^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{z_u \delta}(s) = (1 + C(s)P(s))^{-1}$$

$$P_{z_x r}(s) = Q^{\frac{1}{2}}(I + P(s)C(s))^{-1}P(s)C(s)Q^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{z_x \delta}(s) = Q^{\frac{1}{2}}(I + P(s)C(s))^{-1}P(s)W(s)$$

$P_{z_u r}(s)$ は Q の値を大きくとることで Q^{-1} となるため考慮していない. $P_{z_u \delta}(s)$ のノルムを小さくするとは, 操作量が外乱に影響を受けないことを表す. $P_{z_x r}(s)$ は閉ループ伝達関数行列を表す. $P_{z_x \delta}(s)$ は外乱抑制特性を表しており, $W(s)$ を低周波数領域と付近でゲインを上げるように周波数整形することで, その周波数帯域の影響を定数行列 Q を用いて小さくすることができる. 以上より, 重み関数 $W(s)$ と Q の選び方によって制御性能に大きな影響を与えることができる. 本研究では, $W(s)$ を摩擦補償と目標値追従性能を持たせるために整形し, Q を制御対象の応答性改善のために設計する.

4.3 $W(s)$ の周波数整形

初めに制御対象の入力側の重み $W(s)$ を設定する. ここで本研究が扱うボールスクリーンシステムは低周波領域に発生する摩擦と $10[\text{rad}/\text{sec}]$ 付近で発生する摩擦が発生するため, それらの領域に着目して摩擦を補償するような制御器を導出する必要がある. そのため入力側の重みを設定するには, 低周波領域に発生する摩擦の補償と定常偏差を無くし目標値追従性能を持たせるために, 積分器を導入する必要がある. また $10[\text{rad}/\text{sec}]$ 付近で発生する摩擦を補償するために, $W(s)$ は $10[\text{rad}/\text{sec}]$ 付近でゲインを持ち上げるような設定にしなければならない. 以上の条件をふまえて本研究では $W(s)$ を式 (8) のように設定した.

$$W(s) = \frac{10s + 15}{0.05s + 1} \times \frac{1}{s} \quad (8)$$

図 13 に $W(s)$ のボード線図を示す. 図 13 より $W(s)$ は低周波領域と $10[\text{rad}/\text{sec}]$ 付近でゲインが上がっていることが分かる.

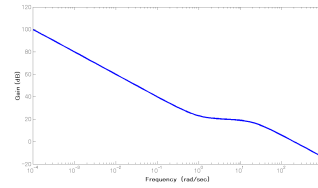


図 13 Bode diagram of $W(s)$

4.4 制御対象の応答性改善

次に制御対象の出力側の重み Q を設定する. ここで, 出力側の重み Q は制御出力の応答性改善のための重みである. その理由を以下に述べる. 重み関数を付加した拡大系プラントの直達項 $D_d = 0$ のとき, H_{∞} ループ整形で導出される制御器 C' は, 式 (9) の 2 つのリカッチ方程式を解く問題に帰着される.

$$\begin{aligned} A_d^T X + X A_d - X B_d B_d^T X + C_d^T C_d &= 0 \\ A_d Z + Z A_d^T - Z C_d^T C_d Z + B_d B_d^T &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

上記の式の解, X と Z を用いることで, 制御器は式 (10) のように与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= (A_d + B_d F + H C_d) x_k(t) + H y_k(t) \\ u_k(t) &= F x_k(t) \end{aligned} \quad (10)$$

ただし, $F = -B_d^T X$, $H = \gamma^2 W_1^{-T} Z C_d^T$, $W_1 = I + (X Z - \gamma^2 I)$ である. 式 (10) の状態フィードバックゲインは $F = -B_d^T X$ で与えられ X は式 (9) は LQ 制御で用いられるリカッチ方程式と一致するため, F は式 (10) の評価関数 J に対する解であることがわかる.

$$J = \int_0^{\infty} (Z_x(t)^T Z_x(t) + u(t)^T u(t)) dt \quad (11)$$

ここで O を 2×2 の零行列とすると, $Z_x(t) = C_d x(t) = [Q \ O] x(t)$ と表す事ができるため, 式 (11) は式 (12) となる.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x(t)^T C_d^T C_d x(t) + u(t)^T u(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} (x(t)^T Q^2 x(t) + u(t)^T u(t)) dt \end{aligned} \quad (12)$$

定数重み Q を与えることで, 評価関数 J を最小化する状態フィードバックゲイン F を得る. LQ 制御と同等の役割を持った状態フィードバックゲインを実装している制御器を H_{∞} ループ整形を使って実現した. 今回定数重み Q は式 13 のように設定した.

$$Q = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (13)$$

4.5 ロバスト制御系設計

本研究ではポリトープ表現を用いることによりロバスト制御系設計を実現することを考える. テーブルの質量 $M[\text{kg}]$ は行列の中で有理式で表されており非線形パラメー

タである。そこで、 $\alpha = 1/M$ と変数変換をして考えた。 M の変動を元々のテーブルの質量 $M[\text{kg}]$ から $M + 5[\text{kg}]$ したもまでの変動幅を考える。すると α の変動は

$$\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] = [0.1821, 2.0408] \quad (14)$$

となった。この可変パラメータ α を含んだ行列を $A_d(\alpha), B_d(\alpha)$ とおくと、ポリトープ集合を用いたシステム行列は、 $A_{d0} = A_d(\alpha_{min}), B_{d0} = B_d(\alpha_{min})$ と $A_{d1} = A_d(\alpha_{max}), B_{d1} = B_d(\alpha_{max})$ で表現できる。

ここで 4.1 節の式 (3) (4) のリカッチ方程式をそれぞれ LMI 化し、その LMI に対しテーブルの質量の変動に対してポリトープ表現した連立 LMI を解くことによりロバスト性を補償することを考える。式 (3) は次式で表せる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -PA_{d0}^T - A_{d0}P - B_{d0}Y - Y^T B_{d0}^T & PC_d^T & Y^T \\ & C_d P & I \\ & Y & 0 \\ -PA_{d1}^T - A_{d1}P - B_{d1}Y - Y^T B_{d1}^T & PC_d^T & Y^T \\ & C_d P & I \\ & Y & 0 \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} Z_x & I \\ I & P \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right.$$

$X = X^T = P^{-1} > 0, K = -B_d^T X, Y = KX, Z_r$ が存在する範囲で線形目的関数 $E = \text{trace}[Z_r]$ を最小化する。また、式 (4) は次式で表せる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -P_z A_{d0} + A_{d0}^T P_z - Y_z C_d - C_d^T Y_z^T & P_z B_{d0} & Y_z \\ & B_{d0}^T P_z & I \\ & Y_z^T & 0 \\ -P_z A_{d1} + A_{d1}^T P_z - Y_z C_d - C_d^T Y_z^T & P_z B_{d1} & Y_z \\ & B_{d1}^T P_z & I \\ & Y_z^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} Z_x & I \\ I & P \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right.$$

$Z = Z^T = P_z^{-1} > 0, H = -ZC_d, Y_z = PH, Z_l$ が存在する範囲で線形目的関数 $E = \text{trace}[Z_l]$ を最小化する。これらによって得られる X と Z を用いることによりロバスト安定性を補償する。

5 外乱抑制

本節では設定した重み関数の効果を調べるため、外乱抑制と導出した制御器の特性をゲイン線図を用いて解析する。初めに外乱抑制特性を調べるために、摩擦 δ から負荷の位置 y までのゲイン線図を図 14 に示す。図 14 由

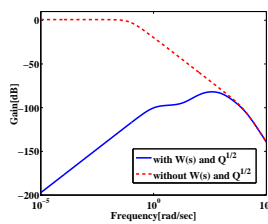


図 14 Gain diagram from friction to output

り重み関数を付加することで低周波領域と 10[rad/sec] 付近で外乱抑制が実現できていることが分かる。

6 シミュレーション

目標値 $1.0 \times 10^{-5}[\text{m}]$ のステップ入力を 1.0 秒後に加え、目標値追従制御を実現する。シミュレーションでは??節で示した摩擦モデルを組み込む。またロバスト性が補償されているか確認するために、重りを 5[Kg] 乗せた場合と何も乗せない場合の 2 つの状況でシミュレーションを行った。

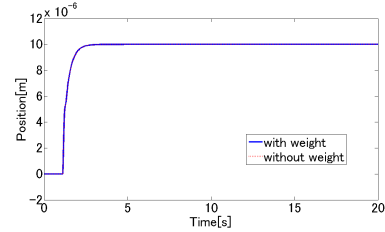


図 15 Simulation of output

図 15 より重りを載せた時と乗せてない時の応答が一致しているのがわかる。よってロバスト性が補償されたと言える。

7 おわりに

本研究では実験検証により制御対象であるボールスクリュシステムにおいてスティックスリップ現象の解析を行った。また、ボールスクリュシステムを制御対象とし、目標値追従機能と摩擦補償、ロバスト安定性を同時に実現する制御器を H_∞ ループ整形で導出し、要求仕様を満たす制御系を構築した。その際にボールスクリュシステムには、静止摩擦と 10[rad/sec] 付近の摩擦が発生するため、それらの摩擦を各周波数帯域で補償し、かつ目標値追従性能を持たせるように周波数整形を行うことで、精密位置決め制御をシミュレーション上で実現した。また、 H_∞ ループ整形で用いられるリカッチ方程式を LMI 化することにより、ポリトープ表現を用いてテーブルの質量に対するロバスト性を補償した。

参考文献

- [1] 佐藤海二：精密位置決め制御の基礎，精密工学会誌，72-11，1341/1344(2006)
- [2] D McFarlane, K Glover：A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, 36-6, 759/769(1992)
- [3] 弓場井一裕ほか：重み最適化と H_∞ ループ整形法による回転型倒立振子のゲインスケジューリング制御，IEEJ Trans. EIS, 126-12, 1504/1513(2006)
- [4] 川谷亮治, 松嶋博英：正規化規約分解表現に基づく橋梁のロバスト制振制御，システム制御情報学会論文誌，6-1，48/56(1993)
- [5] 佐藤海二ほか：各種制御法を用いた送りねじ位置決め系の性能評価 (第一報)-基本性能とクーロン摩擦力変動の影響-，精密工学会誌，63-11，1614/1619(2009)
- [6] Yuki Sugiyama, Masakazu Naito, Gan Chen and Isao Takami: H_∞ Loop Shaping for Positioning Control System with Non-linear Friction, Asian Control Conference, 2013
- [7] 宮元慎一, 岩崎聡, 柴田昌明, 高田勝彦：LMI Loop Shaping 法による制御系設計とブーム制振問題への適用，計測自動制御学会論文集，35-12，1567/1574(1999)