中学校数学領域「図形」における問題づくりの数理的考察

M2013SS008 永井千尋
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，中学校数学における問題づくりの数理的考察を行い，問題づくりの仕組みを整理することである．対象とする領域は，中学校2年で扱う「図形」の三角形の合同条件を用いる証明である．具体的には，合同な2つの三角形の配置から証明問題をつくる方法を提案し，実際にその方法による問題づくりを行うことで，その方法の有用性を確認する．

本研究が提案する方法を以下に示す．

方法1:

STEP1 合同な2つの三角形TとT′を，Tの1つの頂点AとT′の1つの頂点Dが重なるように配置する．特に，次の条件を満たす配置を考える．

条件1 TにおいてAを端点とする辺eと，T′においてDを端点とする辺e′が同一の直線上にある．

条件1を満たす配置は次の3つに分けて考える．
(i) eとe′が一致する．
(ii) eとe′のうち，片方がもう片方に含まれる．ただし，一致はしない．
(iii) (i),(ii)以外，すなわち，eとe′の共有点はA(=D)のみである．

STEP2 次の操作を組み合わせて，新しい直線や線分，頂点を加える．

- 2頂点(端点)を結ぶ．
- 延長線をひく．
- 垂線をひく．
- 平行移動させる．
- 対称移動させる．

STEP3 STEP2で追加した直線や線分，頂点を用いて，TとT′の合同条件を導出する条件を表現する．この導出には，既習の図形の性質を用いる．

STEP4 STEP2でできた図形とSTEP3の条件を踏まえ，TとT′が合同であることを証明する問題文をつくる．

本研究では，方法1による問題づくりを，3辺の長さが異なる直角三角形に限定して行った(ここでは直角三角形の辺を長い順に，斜辺，長辺，短辺と呼ぶことにする)．この制約のもとでは，STEP1の(i)の配置は全部で9通り，(ii)の配置は全部で24通り，(iii)の配置は24通り以上ある(図1, 図2, 図3参照)．

方法1の有用性は，実際に作成できた問題の数，及び，作成された問題と，教科書や問題集にある問題との類似性により確認できたと考える．より具体的には，実際に作成した問題は表1に示す通り，212問であり，そのうち10問が，教科書[2]や問題集[4],[5]の問題と類似していた．

表1　作成した問題の数

配置の種類	配置の数	作成した問題数
(i)の配置	9通り	36問
(ii)の配置	24通り	71問
(iii)の配置	24通り	105問
合計	57通り	212問

以下の2節で，STEP3で用いる図形の性質を列挙する．3節で方法1に基づいて作成した212問のうち4つを示す．

2　図形の性質

STEP3で用いる既習の図形の性質のうち，3節で用いるものを列挙する．これらの性質のうち性質1〜性質8は[1],[2],[3]から抽出している．

性質1 対頂角は等しい

性質2 平行線の性質

2つの直線に1つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ．

(a) 2つの直線が平行ならば，同位角は等しい．
(b) 2つの直線が平行ならば，錯角は等しい．

性質3 三角形の内角・外角の性質

(a) 三角形の3つの内角の和は180°である．
(b) 三角形の1つの外角は，そのとなりにない2つの内角の和に等しい．

性質4 2つの辺が等しい三角形を二等辺三角形という．

性質5 2つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である．

性質6 平行四辺形の性質

(a) 平行四辺形の2組の向かい合う辺は，それぞれ等しい．
(b) 平行四辺形の2組の向かい合う角は，それぞれ等しい．
(c) 平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる．

性質7 平行四辺形になる条件

四角形は，次の各場合に平行四辺形である．

(a) 2組の向かい合う辺が，それぞれ平行であるとき(定義)
(b) 2組の向かい合う辺が，それぞれ等しいとき
(c) 2組の向かい合う角が，それぞれ等しいとき

(d) 対角線が，それぞれの中点で交わるとき

(e) 1 組の向かい合う辺が，等しくて平行であるとき

性質 8 対称移動の性質

対応する点を結んだ線分は，対称の軸と垂直に交わり，その交点で 2 等分される．また，対称になる図形において，対応する線分の長さ，角の大きさは等しい．

性質 9 二等辺三角形，二等分線，平行の関係

図 4 において，2 つの直線 l と m が平行で，辺 BC が ∠B の二等分線ならば，△ABC は AB=AC の二等辺三角形である．

証明 9 の証明. 性質 4, 性質 5 を用いる．

3 具体例

方法 1 に基づいて作成した 212 問のうちの 4 つを示す．

例 1 ((i) の配置)

STEP1 図 5 の配置から問題を考える．

STEP2 1 つの三角形の長辺と，もう 1 つの三角形の短辺の延長線をひき，頂点や交点に記号を付けたものを図 6 に示す．

STEP3 △ABC と △ADC の合同条件を「直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい」，すなわち，「∠ABC=∠D= 90 °,AC 共通,CD=CB」とする．

STEP4 STEP1〜STEP3 を基に，問題をつくる．

『図 5 のような ∠D= 90 °の △CDE がある．辺 CE 上に CD=CB となる点 B をとり，この点を通る辺 CE の垂線と，辺 DE との交点を A とする．このとき，△ABC≡△ADC を証明せよ.』

上で作成した問題に類似した問題が [4] に載っている．図 7 に，その類似問題に用いられている図を示す．図 7 の A,B,C,D,E を図 6 の D,C,B,E,A に対応付けることにより，仮定や合同となる三角形の配置が一致する問題と見ることができる．

例 2 ((ii) の配置)

STEP1 図 8 の配置から問題を考える．

STEP2 それぞれの三角形の斜辺を平行移動させ，1 つの長辺 (e または e′) の延長線をひき，2 頂点を結ぶ．頂点や交点に記号をつけたものを図 9 に示す．

STEP3 △ABC と △CDE の合同条件を「直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい」，すなわち,「∠ABC= ∠CDE= 90 °,∠BAC= ∠DCE, AC=CE」とする．このうちの ∠BAC= ∠DCE は性質 2 を用いて，AF∥CE,∠BGA= ∠BAC から導出できる．また，AC=CE は性質 2, 性質 6, 性質 7, 性質 9 を用いて，AC∥FE,AF∥CE, ∠ACF= ∠FCE から導出できる．

STEP4 STEP1〜STEP3 を基に，問題をつくる．

『図 9 のような AC∥FE,AF∥CE の四角形 AFEC がある．この四角形の対角線 FC は ∠C の二等分線である．辺 AF 上に点 G をとり，頂点 A から線分 CG に垂線をひき，交点を B とする．このとき，∠BGA= ∠BAC となる．また，頂点 E から線分 CG に垂線をひき，交点を D とする．以上より，△ABC≡△CDE を証明せよ.』

上で作成した問題に類似した問題が [5] に載っている．図 10, 図 11 に，その類似問題に用いられている図を示す．図 9 の A,B,C,D,E に図 10 の C,G,D,F,A，または，図 11 の A,E,D,G,C を対応付けることにより，これらの問題は，合同となる三角形の配置が一致する問題と見ることができる．ただし，図 10, 図 11 では四角形を正方形としていることや，その他 3 点の置き方に違いがある．

例 3 ((iii) の配置)

STEP1 図 12 の配置から問題を考える．

STEP2 2 頂点を結び，頂点や交点に記号をつけたものを図 13 に示す．

STEP3 △ABC と △DCE の合同条件を「直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい」，すなわち,「∠BAC= ∠CDE,∠ABC= ∠DCE(または，∠ACB= ∠DEC),BC=CE」とする．このうちの ∠ABC= ∠DCE(または，∠ACB= ∠DEC) は，性質 3 を用いて，BC⊥CE, 点 C は線分 AD 上であることから導出できる．また，BC=CE は性質 3, 性質 4, 性質 5 を用いて，∠CBE= 45 °,BC⊥CE から導出できる．

STEP4 STEP1〜STEP3 を基に，問題をつくる．

『図 13 のような ∠A= ∠D= 90 °の四角形 ABED において，辺 AD 上に ∠CBE= 45 °, BC⊥CE となるよう点 C をとる．このとき，△ABC≡△DCE を証明せよ.』

上で作成した問題に類似した問題が [5] に載っている．図 14 に，その類似問題の解答に用いられている図を示す．図 14 の E,C,B,D,A を図 13 の A,B,C,D,E に対応付けることにより，合同となる三角形の配置が一致する問題と見ることができる．ただし，図 14 は △ECB と △DBA の合同条件を「三角形の 3 組の辺がそれぞれ等しい」，すなわち,「EC=DB,EB=DA,CB=BA」としており，2 点 A,B に座標を与えることで導出できるようになっている．

例 4 ((iii) の配置)

STEP1 図 15 の配置から問題を考える．

STEP2 2 頂点を結び，左側の三角形の長辺を平行移動させる．さらに，端点と頂点を結び，頂点や交点に記号をつけたものを図 17 に示す．

STEP3 △ABC と △DEC の合同条件を「三角形の 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」，すなわち,「∠BAC= ∠EDC,∠ABC= ∠DEC, AB=DE」とする．最初の条件は，性質 8 を用いて，

(1) 四角形 ABFE は長方形

(2) 四角形 ABFE の対角線 BE で辺 AE 側

に点 F を折り返すこと
から導出できる．2 つ目の条件は，性質 1,
性質 3 を用いて，(1),(2) から導出できる．3 つ目の条件は，性質 6 を用いて，(1),(2) から導出できる．

STEP4 STEP1〜STEP3 を基に，問題をつくる.『図 16 のような長方形 ABFE を対角線 BE で辺 AE 側に折り返す．このとき，頂点 F が移動した点を D とし，辺 AE との交点を C とする．以上より，△ABC≡△DEC を証明せよ.』

上で作成した問題に類似した問題が [5] に載っている．図 17 に，その類似問題に用いられている図を示す．図 16 の A,B,C,D,E に図 17 の左の D,C,F,E,A，または，図 17 の右の A,B,F,E,D を対応付けることにより，これらの問題は，仮定や合同となる三角形の配置が一致する問題と見ることができる．

参考文献

[1] 岡本和夫，小関熙純，森杉馨，佐々木武，ほか 39 名：『未来へひろがる数学 1』．啓林館，大阪，2012.

[2] 岡本和夫，小関熙純，森杉馨，佐々木武，ほか 39 名：『未来へひろがる数学 2』．啓林館，大阪，2012.

[3] 原田直樹：『シークエントに基づく証明教育 中学校・高等学校の数学「図形」を中心として』．南山大学院数理情報研究科修士論文，2014.

[4] 文英堂編集部：『最高水準問題集　数学　中学 2 年』．文英堂，東京，2012.

[5] 間宮勝己，山腰政喜：『最高水準特進問題集　数学　中学 2 年』．文英堂，東京，2012.

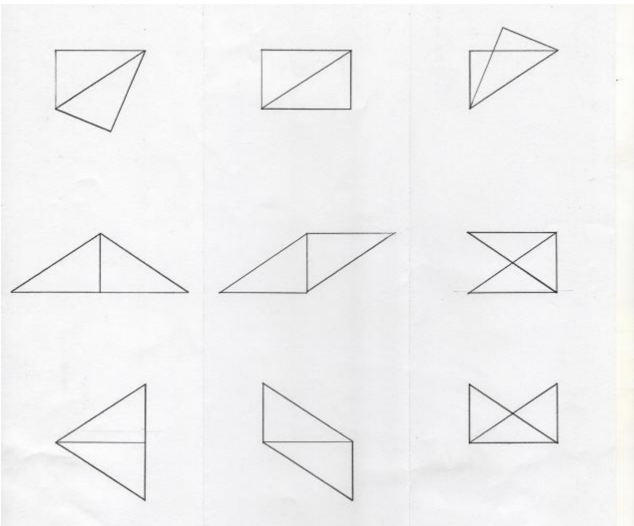

図 1 (i) の配置

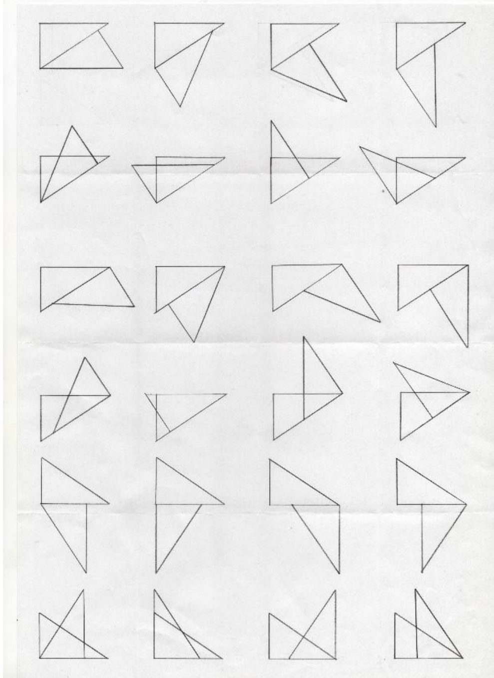

図 2 (ii) の配置

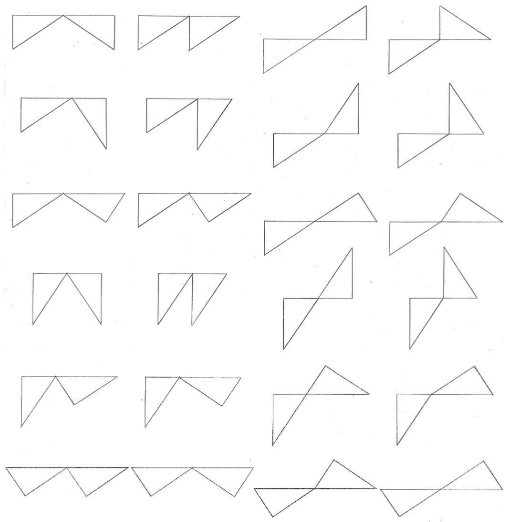

図 3 (iii) の配置

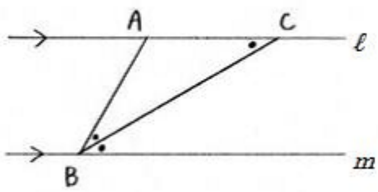

図 4 二等辺三角形，二等分線，平行の関係

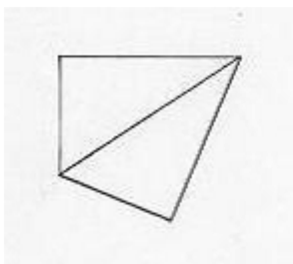

図 5 例 1 の STEP1

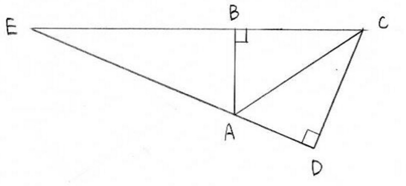

図 6 例 1 の STEP2

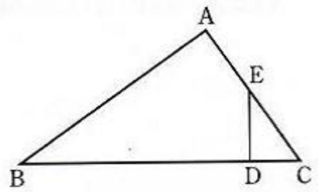

図 7 例 1 の類似問題 (出典 [4])

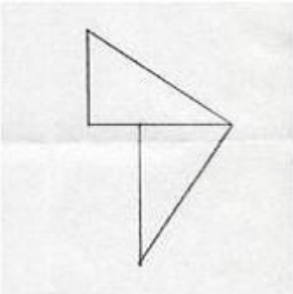

図 8 例 2 の STEP1

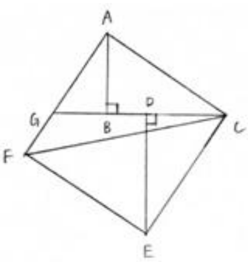

図 9 例 2 の STEP2

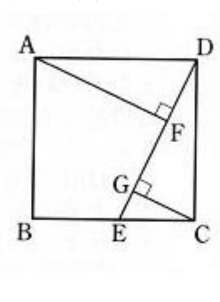

図 10 例 2 の類似問題 1(出典 [5])

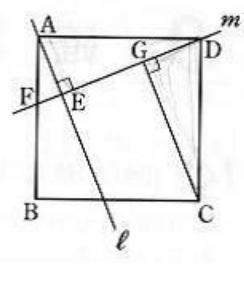

図 11 例 2 の類似問題 2(出典 [5])

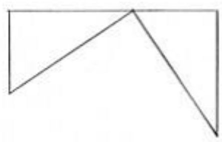

図 12 例 3 の STEP1

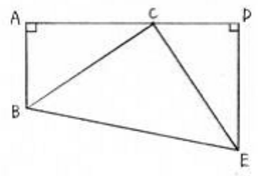

図 13 例 3 の STEP2

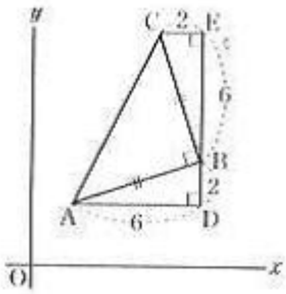

図 14 例 3 の類似問題の解答 (出典 [5])

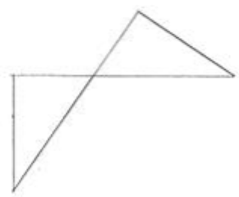

図 15 例 4 の STEP1

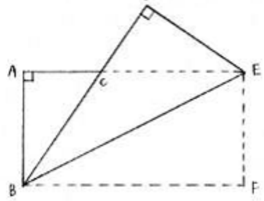

図 16 例 4 の STEP2

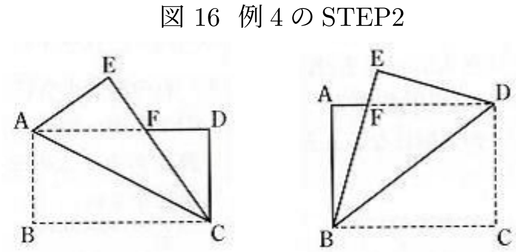

図 17 例 4 の類似問題 1(出典 [5])