

# 歯付ベルト駆動装置のモデル化と制御

M2014SC007 岩間真希

指導教員：大石泰章

## 1 はじめに

歯付ベルト駆動装置は、歯車と歯付ベルトにより構成され、低コスト・低騒音・軽量であり潤滑が不要な動力伝達装置である [1]。歯付ベルトの材料には合成ゴムやポリウレタンが多く使用されている。ベルトと歯車が噛み合い回転運動を行うため、駆動側の歯車の動力を正確に従動側の歯車へ伝達でき、同期回転が必要な場面での使用も可能である。そのため歯付ベルト駆動は OA 機器や産業用ロボット、機械製品などに組み込まれ、発生された動力を目的位置まで伝達させる役割を担い、使用されることが多い。しかし歯車同士の動力伝達や金属製のベルトに比べ、ゴム製のベルトは耐久性・剛性が弱く経年劣化により伸び率が変化する可能性も起きる。さらに劣化が進むとベルトに背面クラックなどが生じ、ベルトが切れる危険性がある。また歯車を使用した伝達機器全般の欠点として、バックラッシュがある。バックラッシュとは運動方向に意図して設けられる隙間であり、この隙間があることで歯車などは噛み合い回転することができる。このバックラッシュは歯磨耗などの劣化により増大する。その増大した分のバックラッシュが振動や騒音の発生、機械の故障を引き起こす原因となる。

本研究では、以上のようなベルト駆動における問題点を制御手法により克服することを考え、装置の動特性が変化しても、制御性能が維持されるようにすることを目指す。まずベルト駆動装置のモデル式を 2 種類立て、比較を行う。次に、バックラッシュがある場合のシステムの状態をモデル化し、最後にそのシステムに対する制御を行う。本研究で行う実験時には、駆動歯車・変速機・従動歯車それぞれを歯付ベルトで繋ぎ、動力を駆動歯車から従動歯車へと伝達する装置を使用した。また、本研究の実験装置は金属製の歯車とゴム製の歯付ベルトで構成される。装置の詳しい説明は第 2 章に記載する。

## 2 制御対象

本章ではベルト駆動装置の構成と使用するパラメータの説明について述べる。



図 1 ベルト駆動装置の写真

本研究では、Educational Control Products 社の振動制御実験装置 Model #220 (ベルト駆動装置) を使用する [2]。図 1 はその装置を上から見た時の写真である。写真上の 2 つの黒い円盤のうち、小さい方が駆動側の円盤、大きい方が従動側の円盤であり、それぞれの円盤下部に歯車がとりつけられている。また、間に存在する二重の白い円形が変速機である。これら 2 つの円盤と変速機は歯付ベルトにより繋がれ、動力を駆動側から従動側へ伝達している。

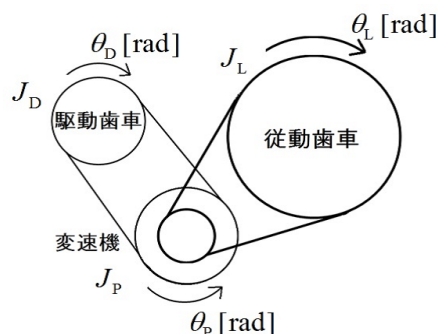


図 2 ベルト駆動装置の概略図

図 2 は図 1 の概略図、表 1 は物理パラメータの表記方法について示している。ただし、図 2 の円は 2 つの円盤の歯車を示している。また表 1 において、駆動側の円盤の慣性モーメント  $J_D$  [kgm<sup>2</sup>]、従動側の円盤の慣性モーメント  $J_L$  [kgm<sup>2</sup>]、駆動側の円盤の粘性摩擦係数  $c_D$  [Nms/rad]、従動側の円盤の粘性摩擦係数  $c_L$  [Nms/rad] の各値は、同定実験を行って導出している。

駆動側の円盤にはサーボモータが接しており、駆動トルクを駆動側の円盤へ入力することができる。駆動側の円盤に付属する歯車は、変速機下部の歯車と歯付ベルトで連結されている。さらに、これらは変速機上部の歯車と歯付ベルトで、従動側の円盤に付属する歯車へ繋がっている。各円盤にはエンコーダが付属しており、円盤の角度を測定することができる。

使用する実験装置は、物理パラメータのいくつかを任意に変化させることが可能である。変更可能なパラメータを簡単に説明する。各円盤の慣性モーメントは、円盤に重りを取りつけることで変更可能である。ギア比とベルトの柔軟性は、変速機の歯車と歯車間の歯付きベルトを交換することで調整ができる。このとき  $g_D$ ,  $g_L$  も変化する。バックラッシュは、変速機部分で擬似的に発生させている。外乱を入力するモータが従動側の歯車に接続されており、出力における粘性摩擦と外乱を模擬している。クーロン摩擦ブレーキは、従動側の歯車の下にありブレーキで導入することができる。

これらの変化可能な物理パラメータにより、円盤に対

表 1 ベルト駆動装置の物理パラメータ

名称	表記	単位
時間	$t$	s
駆動側の円盤の角度	$\theta_D(t)$	rad
従動側の円盤の角度	$\theta_L(t)$	rad
変速機の角度	$\theta_P(t)$	rad
駆動側の円盤の慣性モーメント	$J_D$	kgm <sup>2</sup>
従動側の円盤の慣性モーメント	$J_L$	kgm <sup>2</sup>
変速機の慣性モーメント	$J_P$	kgm <sup>2</sup>
駆動側の円盤への粘性摩擦係数	$c_D$	Nms/rad
従動側の円盤への粘性摩擦係数	$c_L$	Nms/rad
駆動トルク	$T_D(t)$	Nm
駆動側の円盤と 従動側の円盤間のギア比	$g = \frac{d_D}{d_L}$	—
駆動側の円盤と 変速機間のギア比	$g_D$	—
変速機と 従動側の円盤間のギア比	$g_L$	—
ばね定数	$k$	Nm/rad
減衰係数	$c$	Nms/rad

する負荷の変化やベルト駆動装置の劣化を擬似的に表現することができる。

### 3 ベルト駆動装置のモデル化

本研究では、回転角度の制御について取り扱う。制御対象への入力を駆動側の円盤へのトルクである  $T_D(t)$  とし、出力を  $[\theta_D(t) \ \theta_L(t)]^T$  とする。バックラッシュは存在せず、歯付きベルトの断面は弛緩しないと仮定する。一般に  $f(t)$  の時間による 1 階微分を  $\dot{f}(t)$  で、 $f(t)$  の 2 階微分を  $\ddot{f}(t)$  で表す。

ベルト駆動装置には柔軟性のあるベルトが含まれている。その特性をばねとダンパで近似して、モデル化を行う。ベルト駆動装置には柔軟性のあるベルトが含まれている。そのため円盤が回転するときに起きるベルトの引っ張りにより、ベルトに伸びが発生する。この現象を、ベルトにばね成分が含まれると考え近似を行う。また、柔軟性のあるベルトがシステムの大部分を占めている場合、ダンパをモデルに含ませることで実用的なモデルをたてることが可能となる。

本研究では、ベルト駆動装置のモデル化の比較を行う。一つ目では、駆動側の円盤の角度と変速機の角度の間は比例の関係があると仮定をおき、モデル化する。つまり、ベルトの張力が駆動側の円盤と変速機の間に含まれていないと考える。二つ目では、ベルトの張力が駆動側の円盤と変速機の間および変速機と従動側の円盤の間のそれぞれに存在していると考え、モデル化する。

#### 3.1 ベルト駆動装置の 4 次モデル

ベルトの張力を  $F_1, \dots, F_4$  とし、静的な張力を  $F_0$  とする。また、各歯車の半径を  $d_D, d_{PD}, d_{PL}, d_L$  と表す。

駆動側の円盤に関する運動方程式を式 (1) で、変速機に

関する運動方程式を式 (2) で、従動側の円盤に関する運動方程式を式 (3) で表す。

$$J_D \ddot{\theta}_D + c_D \dot{\theta}_D = T_D + [F_1 - F_2]d_D, \quad (1)$$

$$J_P \ddot{\theta}_P = [F_2 - F_1]d_{PD} + [F_4 - F_3]d_{PL}, \quad (2)$$

$$J_L \ddot{\theta}_L + c_L \dot{\theta}_L = [F_3 - F_4]d_L. \quad (3)$$

駆動側の円盤の角度と変速機の角度の間は比例の関係があり、ベルトの張力を含んではいないと考えるため、 $F_1 - F_2$  を用いて式 (1) と式 (2) を統合し、式  $\theta_D(t) = g_D \theta_P(t)$  を用い  $\theta_P$  を  $\theta_D$  に置き換える：

$$J_D \ddot{\theta}_D + c_D \dot{\theta}_D = T_D + [-J_P \ddot{\theta}_D + [F_4 - F_3]d_{PL}] \frac{d_D}{d_{PD}}.$$

駆動側の円盤と変速機をまとめた駆動伝達系は慣性モーメント  $J_D^*$  を持つと考える。スケーリング則とギア比より、 $J_D^*$  は  $J_D^* = J_D + \frac{J_P}{g_D^2}$  となる。

$F_3 - F_4$  はベルト張力の近似にばねとダンパの動特性を用いて  $F_3 - F_4 = k(\frac{d_{PL}}{d_L^2} \theta_P - \frac{1}{d_L} \theta_L) + c(\frac{d_{PL}}{d_L^2} \dot{\theta}_P - \frac{1}{d_L} \dot{\theta}_L)$  と表す。

上記の式を用いて、4 次のベルト駆動装置の運動方程式は以下のようになる：

$$J_D^* \ddot{\theta}_D(t) + (c_D + \frac{1}{g^2}) \dot{\theta}_D(t) - \frac{c}{g} \dot{\theta}_L(t) \quad (4)$$

$$+ k(\frac{1}{g^2} \theta_D(t) - \frac{1}{g} \theta_L(t)) = T_D(t),$$

$$J_L \ddot{\theta}_L(t) + (c_L + c) \dot{\theta}_L(t) - \frac{c}{g} \dot{\theta}_D(t) \quad (5)$$

$$+ k(\theta_L(t) - \frac{1}{g} \theta_D(t)) = 0.$$

#### 3.2 ベルト駆動装置の 6 次モデル

前節と同様に考える。しかしながら本節では、駆動側の円盤と変速機の間歯付きベルトの張力も存在していると考え。  $F_1 - F_2$  と  $F_3 - F_4$  をベルトの張力の近似にばねとダンパの動特性を用いて、

$$F_1 - F_2 = k_{DP}(\frac{d_D}{d_{PD}^2} \theta_D - \frac{1}{d_{PD}} \theta_P) \quad (6)$$

$$+ c_{DP}(\frac{d_D}{d_{PD}^2} \dot{\theta}_D - \frac{1}{d_{PD}} \dot{\theta}_P),$$

$$F_3 - F_4 = k_{PL}(\frac{d_{PL}}{d_L^2} \theta_P - \frac{1}{d_L} \theta_L) \quad (7)$$

$$+ c_{PL}(\frac{d_{PL}}{d_L^2} \dot{\theta}_P - \frac{1}{d_L} \dot{\theta}_L)$$

と表す。ただし、駆動側の歯車と変速機間の歯付きベルト、および変速機と従動側の歯車間の歯付ベルトのばね定数と減衰係数をそれぞれに対して、 $k_{DP}, k_{PL}$  [Nm/rad] と  $c_{DP}, c_{PL}$  [Nms/rad] とする。

式 (1), (2), (3), (6), (7) を用いて、6 次のベルト駆動

装置の運動方程式は以下のようになる：

$$J_D \ddot{\theta}_D(t) + (c_D + \frac{c_{DP}}{g_D}) \dot{\theta}_D(t) - \frac{c_{DP}}{g_D} \dot{\theta}_P(t) + k_{DP} (\frac{1}{g_D} \theta_D(t) - \frac{1}{g_D} \theta_P(t)) = T_D(t), \quad (8)$$

$$J_P \ddot{\theta}_P(t) + (c_{DP} + \frac{c_{PL}}{g_L}) \dot{\theta}_P(t) - \frac{c_{PL}}{g_L} \dot{\theta}_L(t) - \frac{c_{DP}}{g_D} \dot{\theta}_D(t) + k_{DP} (\theta_P(t) - \frac{1}{g_D} \theta_D(t)) + k_{PL} (\frac{1}{g_L} \theta_P(t) - \frac{1}{g_L} \theta_L(t)) = 0, \quad (9)$$

$$J_L \ddot{\theta}_L(t) + (c_L + c) \dot{\theta}_L(t) - \frac{c}{g} \dot{\theta}_D(t) + k (\theta_L(t) - \frac{1}{g} \theta_D(t)) = 0. \quad (10)$$

### 3.3 4次モデルと6次モデルの比較

実際のベルト駆動装置の動きと前節、前々節にて導出したベルト駆動装置の4次モデルと6次モデルが整合しているか実験を行い確認する。実験時、調整できる物理パラメータは取り得る値の最小値を用いた。制御器はPID制御を使用し、それぞれのゲインはそれぞれ  $K_p = 0.2$ ,  $K_i = 0.1$ ,  $K_d = 0.01$  とする。目標角度の関数は、駆動側の歯車の角度  $\theta_D(t)$  [rad] に対し 1[s] 毎に  $\pi/2$  [rad] と 0 [rad] を切り替えるステップ状の関数を与える。

比較実験の駆動側の円盤の角度  $\theta_D(t)$  と従動側の円盤の角度  $\theta_L(t)$  のそれぞれの結果を図3, 4に示す。黒色の破線が目標角度、黒色の実線がベルト駆動装置の実験結果の値、赤色の実線が4次モデルを使用したシミュレーション結果の値、青色の実線が6次モデルを使用したシミュレーション結果の値を示している。

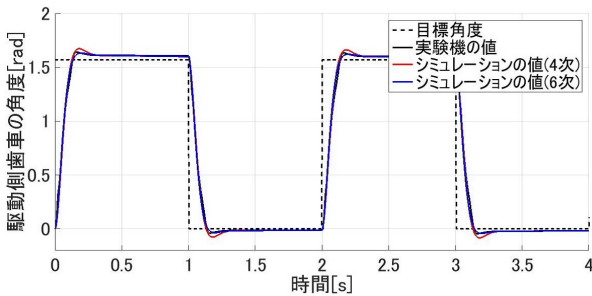


図3 比較実験の実験結果 (駆動側の歯車)

図3では目標角度が変化するとき、実験機の値と4次モデル、6次モデルそれぞれのシミュレーション結果の変動がほぼ同じであることが確認できる。また、収束している値もほぼ同じである。しかしオーバーシュートしている部分では、実験機の値に対して4次モデルと6次モデルのシミュレーション結果の値が異なることが確認できる。

図4では実験機の値は収束するまでに振動しているが、4次モデルのシミュレーションと6次モデルのシミュレーションの値は両方とも振動せずに収束していく。しかしながら、実験機の値と4次モデル、6次モデルそれぞれ

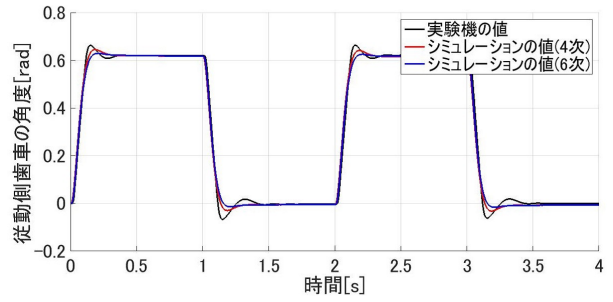


図4 比較実験の実験結果 (従動側の歯車)

の値に対して目標角度のの変化時の動きと収束値はほぼ同じであることが確認できる。

これらの結果より、4次モデルと6次モデルのどちらを使っても、ベルト駆動装置のシミュレーションを十分な精度で行えると考えられる。今回、4次モデルと6次モデルの差異を明確に出すことはできなかった。そのため、従動側の歯車の動きに関してより実験機に近く、またモデルを単純化するために、4次モデルを使用する。

## 4 バックラッシュを含むベルト駆動装置のモデル化

バックラッシュとは第1章で説明したとおり、運動方向に意図して設けられる隙間のことである。遊びともいう。ベルト駆動装置では歯車のかみ合わせ部分にバックラッシュが生じている。バックラッシュには装置が正常に動くために必要な規定値があるが、規定値を超えると振動や騒音の発生、また機械の故障を引き起こす原因となる。

バックラッシュは非線形特性の一つであるヒステリシス特性を持つ [3]。バックラッシュが含まれるシステムでは、動き出しや入力方向が逆転した時に、一時的に動力が伝達されず、入力が一定値を超えたときに動力が伝達されて動き出す現象が起きる。また、動力が伝達されない領域のことを不感帯といい、幅がバックラッシュの大きさを示している。入力  $u$  と出力  $y$  の関係は、図5のように表すことができる。黒い線と線に囲まれ、かつ黒い線を含まない領域では、入力の値に関わらず出力は変化しない。黒い線上では、出力は入力に伴い、線に沿いながら単調増加または、単調減少となる。図5内の赤い点と赤い実線は、動きの一例を示している。また赤い丸は初期値である。

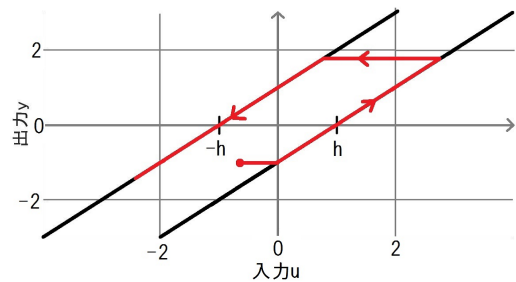


図5 バックラッシュの特性

本研究では、図5のようなバックラッシュの動特性に対し、MathWorks社のSimulinkシステムにあるBacklashブロックを使用してシミュレーションを行う。バックラッシュのモデル化を行う際、以下2つの仮定をおきシミュレーションを行う。

- ・バックラッシュは変速機内で生じている。
- ・バックラッシュにより発生される力は全て0とする。

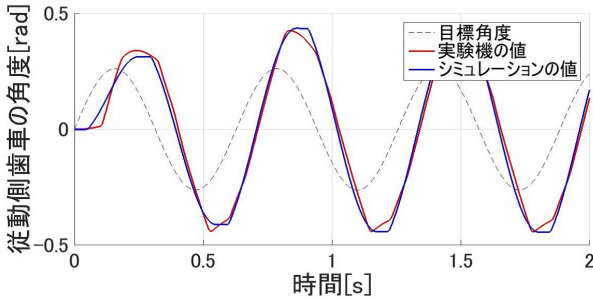


図6 バックラッシュのシミュレーション

シミュレーションの精度を見るため、従動側の歯車の目標角度として振幅  $\frac{\pi}{6}$  [rad] で周波数 5 [rad/sec] の正弦波を与えた。制御器はPID制御を用いている。また、バックラッシュは 0.174 [rad] 以下であると考えられる。黒い破線が目標角度、赤い実線が実験機の値、青い実線がバックラッシュのモデルを含んだシミュレーション結果を示している。図6より、実験機の動きとシミュレーションの値がほぼ一致していることが確認できた。目標角度との位相のずれは、バックラッシュの特性である不感帯部での応答遅れが原因の一つであると考えられる。実験機の値はシミュレーションの結果に比べ、遅れが多く生じているのがわかる。またシミュレーションでは、振幅の最大値と最小値の部分で値が一定になっていることが確認できる。似た現象は実験機の値にも少し起きている。このように4次モデルにBacklashブロックを含ませたモデルはバックラッシュの特性を全てモデル化できるわけではないが、図5のような不感帯の特性はほぼモデル化することができていると考える。ただし、実験機では小刻みに振動するという現象も起きることがある。振動が起きる実験ではシミュレーションの値と実験機の動きは一致しなくなる。

## 5 制御系設計と実装

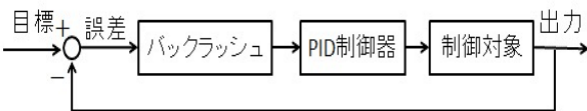


図7 システムの概略図

本研究では、バックラッシュを含んだベルト駆動装置の対策として、図7のように目標角度より観測角度を差し引いた値に対してバックラッシュのモデルを加えるPID制御器の設計を行う。バックラッシュの影響への対策を

加える前と後では実験機の動きがどのように変化するか比較実験を行う。目標角度は従動側の歯車角度に対して、1[s] 毎に  $\frac{\pi}{13}$  [rad] と 0 [rad] が切り替わる波形を与える。制御器には、バックラッシュを使う場合と使わない場合も同じゲインのPID制御器を用いる。

比較実験の従動側の円盤の角度  $\theta_L(t)$  の結果を図8に示す。

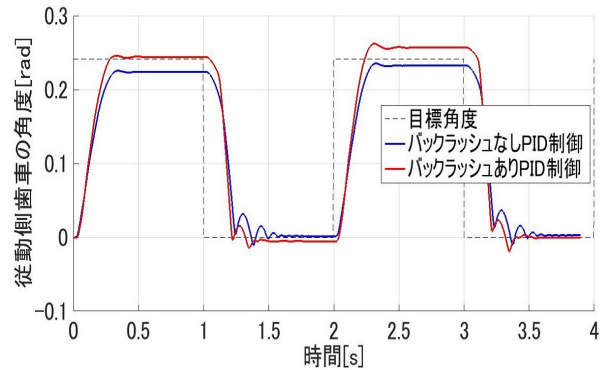


図8 バックラッシュ対策前後の比較

図8は黒い破線が目標角度、青い実線がバックラッシュなしPID制御器を実装した実験機の値、赤い実線がバックラッシュありPID制御器を実装した実験機の値をそれぞれ示している。

図8において、バックラッシュを使ったPID制御の方が振動が少なく、目標角度へ収束している部分もあることが確認できる。また、目標角度が変化した際の動きはほぼ一致している。しかしながら、完全に振動をなくすることはできなかった。

## 6 おわりに

本研究では、実験時に使用するベルト駆動装置のモデル化と比較を行い、実験機の動きとの整合性を検討した。ベルト駆動などで発生するバックラッシュの動きをSimulinkブロックを使って模擬し、妥当性を確認した。また、PID制御器にバックラッシュを人工的に加えることで、バックラッシュにより引き起こされるシステムの振動の対策を行い、その結果の考察を行った。結果として、バックラッシュの影響を少なくすることはできた。今後、さらなる振動現象や目標角度への収束を行うため、用いる制御理論を古典制御から現代制御に変更することが必要になると考えられる。

## 参考文献

- [1] 寺田利邦：『ベルト伝動の実用設計』。養賢社、東京、1996。
- [2] 『モデル220用マニュアル』。有限会社ピーアイディー、東京。
- [3] 藤堂勇雄：『バックラッシュのある制御系の数学的扱いと保障対策』。東京大学生産技術研究所、東京、1963。