閉軌道の繰り返しを用いた Control Moment Gyroscope の姿勢制御

M2014SC019 佐野 椋一

指導教員：大石 泰章

1 はじめに

コントロール・モーメント・ジャイロスコープ (Control Moment Gyroscope，CMG) は，回転する円盤 (フライホイール) の力を利用して，宇宙機の姿勢を制御する制御装置である．CMG は高速回転させたホイールの軸を傾けることにより強力なジャイロトルクを発生させ，宇宙機に対する駆動トルクに変換する．小惑星探査機「はやぶさ」やX線天文衛星の「すざく」などの衛星に搭載されたリアクションホイール (RW) は人工衛星の姿勢制御系として一般的であるが，CMG は RW に比べホイールに蓄えられた角運動量を瞬時に衛星に受け渡すことができるため，姿勢制御装置として国際ステーション (ISS) やアメリカの「スカイラブ」など特に大型の宇宙機に搭載されている．

CMG は状態数より入力数が少ない劣駆動系であり，複雑な非線形性をもつ．特にノンホロノミック拘束の一種である角運動量保存則が存在することが制御問題を難しくさせている．

本論文では、Educational Control Products 社の CMG (Model 750) の制御を考える．先行研究の多くはジンバルを 1 つ固定して系を簡略化して制御設計を行うことが多いが，本研究では全てのジンバルを使用する．制御対象に対して複雑な入力変換を施さず非線形性をそのまま生かすことで任意の運動を行わせる [1][7]．具体的には，制御対象が持つノンホロノミック拘束式に着目してサブシステムを導き，状態量の一部に対して閉軌道を描くような単純な周期入力を与える．描かれる閉軌道の大きさを変化させることで駆動源のない状態量の制御を行う．これは入力ベクトル場の 1 階 Lie 括弧積が，周期入力により発生する状態空間の変位 (ホロノミー) に対応するという原理に基づいたものである [2].

2 制御対象

2.1 CMG の概要

CMG の概略図を図 1 に示す．CMG は中核で回転するロータ 1，その周りに連結されたジンバル 2，3，4 の計 4 つの剛体から成るシステムである．q_1 はジンバル 2 から見たロータ 1 の相対角度を表し，$\omega_1 = \dot{q}_1$ はロータ 1 の角速度を表す．q_2 はジンバル 3 から見たジンバル 2 の相対角度を表し，$\omega_2 = \dot{q}_2$ はジンバル 2 の角速度を表す．q_3 はジンバル 4 から見たジンバル 3 の相対角度を表し，$\omega_3 = \dot{q}_3$ はジンバル 3 の角速度を表す．そして，q_4 はジンバル 4 の角度を表し，$\omega_4 = \dot{q}_4$ はジンバル 4 の角速度を表す．制御入力はロータ 1，ジンバル 2 の駆動トルク τ_1, τ_2 である．各回転軸には光学式高分解能エンコーダが装着されており，角度と角速度の測定が可能である．

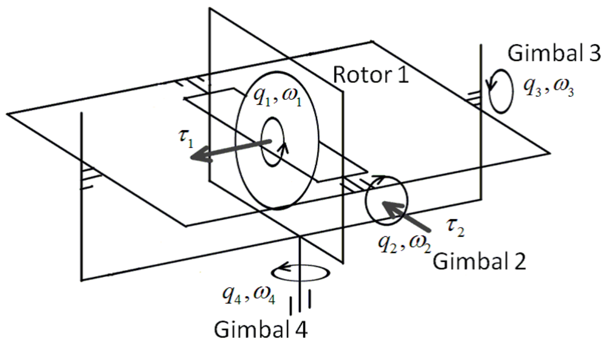

図 1 CMG の概略図

2.2 CMG のモデリング

各剛体の運動方程式を導出するためのラグランジアン L は

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{1}{2}(K_A\omega_4^2 + I_B\omega_4^2 \sin q_2 + J_B\omega_3^2 \\
&+ K_B\omega_4^2\cos q_3 + (I_C + I_D)(\omega_2 - \omega_4 \sin q_3)^2 \\
&+ (J_C + J_D)(\omega_3 \cos q_2 + \omega_4 \sin q_2 \cos q_3)^2 \\
&+ J_D(\omega_1^2 + 2\omega_1(\omega_3 \cos q_2 + \omega_4 \sin q_2 \cos q_3)) \\
&- (K_C + I_D)(\omega_3 \sin q_2 - \omega_4 \cos q_2 \cos q_3)^2) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる [1]．また，表 1 にシステム設計で用いるパラメータを示す．ラグランジュの運動方程式よりロータと各ジンバルに対する運動方程式

$$f_1(q_2, q_3, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4) = \tau_1 \qquad (2)$$

$$f_2(q_2, q_3, \omega_1, \omega_3, \omega_4, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2) = \tau_2 \qquad (3)$$

$$f_3(q_2, q_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4) = 0 \qquad (4)$$

$$f_4(q_2, q_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4) = 0 \qquad (5)$$

を得る．

表 1 CMG の物理パラメータ

慣性モーメント [kg · m^2]					
Gimbal3			Gimbal2		
I_B	J_B	K_B	I_C	J_C	K_C
0.012	0.018	0.030	0.0092	0.023	0.022
Gimbal4	Rotor1				
K_A	I_D	J_D			
0.067	0.015	0.027			

2.3　拘束条件と運動学モデル

本論文ではジンバル 4 の角運動量拘束式に注目して式 (2)–(5) のサブシステムを導く．ジンバル 4 の角度 q_4 に対する共役運動量 p_4 は

$$\begin{aligned} p_4 =& \frac{\partial L}{\partial \dot{q_4}} = \frac{\partial L}{\partial \omega_4} \\ =& J_D\omega_1 \sin q_2 \cos q_3 - (I_C + I_D)\omega_2 \sin q_3 \\ &+ J_1\omega_3 \sin q_2 \cos q_2 \cos q_3 \\ &+ (J_3 + J_1 \sin^2 q_2 + (J_4 - J_1 \sin^2 q_2) \sin^2 q_3)\omega_4 \end{aligned} \tag{6}$$

である．ただし

$$\begin{aligned} J_1 =& J_C + J_D - K_C - I_D, J_2 = J_B + J_C + J_D, \\ J_3 =& I_D + K_A + K_B + K_C, J_4 = I_B + I_C - K_B - K_C. \end{aligned}$$

初期状態において各ジンバルが完全に静止していると仮定すると，このとき角運動量は零であるから，ジンバル 4 の角運動量が保存することより

$$h_1(q)\omega_1 + h_2(q)\omega_2 + h_3(q)\omega_3 + h_4(q)\omega_4 = 0 \tag{7}$$

となる．ここで，h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ は式 (7) に対してそれぞれの角速度 ω_i にかかる角度 q_2, q_3 に依存した非線形関数である．これより状態を $q = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]^{\mathrm{T}}$，入力を $u = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^{\mathrm{T}}$ と見なすことにより疑似的な対称アフィンシステム

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ H_1(q) \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ H_2(q) \end{bmatrix} \omega_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ H_3(q) \end{bmatrix} \omega_3 \\ &= g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．ただし，$H_i(q) = h_i(q)h_4^{-1}(q)$ $(i = 1, 2, 3)$ である．式 (8) の可制御性を判別するために，入力ベクトル場の集合 $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ に対して 1 階 Lie 括弧積 $[g_1, g_2]$，$[g_2, g_3]$，$[g_3, g_1]$ を考えると，G が生成する可制御接分布が初期状態 $q = 0$ において

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \mathrm{span}\{g_1, g_2, g_3, [g_1, g_2], [g_2, g_3], [g_3, g_1]\} \\ &= \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_D}{J_3} & \frac{J_1+I_C+I_D}{J_3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される．$\dim\bar{G} = 4$ であるので，局所可制御となっていることがわかる．

3　制御目的と戦略

3.1　制御目的

本研究では，前節のシステム (2)–(5) に対して姿勢制御問題を考える．ここでの姿勢制御とは，3 つのジンバルの状態 q_2, q_3, q_4 を零にレギュレーションすることである．ここで q_2, q_3 は自由に駆動できるものと考え，q_2, q_3 が図 2 に示す閉軌道を通るような周期運動を設定する．図 2 は角度 q_2, q_3 の 2 次元平面で，閉軌道の一辺を $2R$[rad] とする．この閉軌道に沿って q_2, q_3 を変化させたとき Lie 括弧積 $[g_2, g_3]$ の方向に状態が変化し，ジンバル 4 の角度 q_4 も変化するというホロノミーの原理を利用して q_2, q_3, q_4 を零にレギュレーションできる [2][3]．

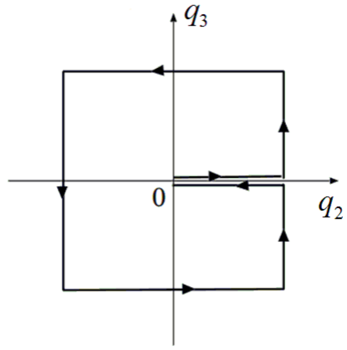

図 2　q_2, q_3 の周期運動

3.2　制御戦略

制御目的を達成するために，式 (8) の角速度 ω_2, ω_3 に対して平均 0，周期 T の周期入力を加える必要がある．q_2, q_3 に図 2 のような閉軌道を描かせるために ω_2, ω_3 を周波数 π，振幅が πR または $\pi R/2$ の正弦波を組み合わせた図 3 のような波形で変化させる．このときのジンバル 4 の角度 q_4 の 1 周期後の変化量は $q \approx 0$ のとき

$$q_4(T) = q_4(0) + \pi R^2 g_{23} + O(R^3) \tag{9}$$

となることが，平均化理論と Stokes の定理から言える [4]．ただし，Lie 括弧積 $[g_2, g_3]$ の第 4 成分を $g_{23} = (J_1 + I_C + I_D)/J_3$ と置くこととする．

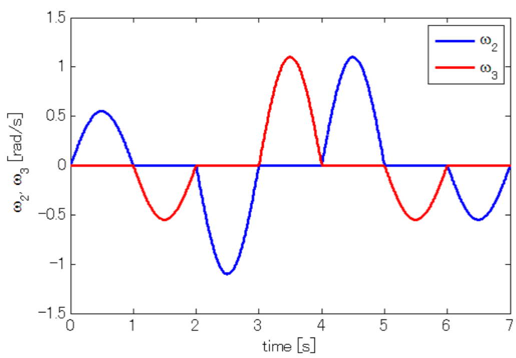

図 3　角速度の周期入力

実際の CMG のシステムにおいて，ジンバル 2 の角速度 ω_2 は直接駆動トルク τ_2 で制御が可能である．一方，ジンバル 3 の角速度 ω_3 は直接制御できる駆動源が存在しない．そこでジンバル 3 の角速度 ω_3 の制御は，ロータ 1 に角速度 ω_1 を持たせ，駆動トルク τ_1 により間接的に制御する．

3.3　ジンバル 4 の回転量推定

式 (9) では $\omega_1 = 0$ と考えていたが，実際にジンバル 3, ジンバル 4 を制御するためには ω_1 を非零にしなくてはならない．ゆえに式 (8) の運動学モデルに対して，ω_1 を $\omega_{1,0}$ に固定としたときの一周期入力後の変化量 $q_4(T)$ は

$$\Delta q_4 = q_4(0) + \bar{g}_1(T) + \pi R^2 g_{23} + O(R^3), \tag{10}$$

$$\bar{g}_1(T) = \int_0^T H_1(q)\omega_{1,0}\mathrm{d}t, \tag{11}$$

$$H_1(q) = \frac{-J_D \sin q_2 \cos q_3}{J_3 + J_1 \sin^2 q_2 + (J_4 - J_1 \sin^2 q_2)\sin^2 q_3} \tag{12}$$

となる．式 (10) はロータ 1 が一定の角速度を持つときの q_4 の変化量を表す．式 (12) より，$\bar{g}_1(T)$ は q_2, q_3 の値によって変動するため閉軌道の長さ R に依存することがわかる．特に式 (9) より，$\bar{g}_1 \simeq \pi\kappa R^2$ となるように定数 $\kappa > 0$ を実験的に定めれば，q_4 の変化量 Δq_4 は R が十分小さいとき

$$\Delta q_4 \approx \alpha = \pi(g_{23} + \kappa)R^2 \tag{13}$$

となり R^2 に比例するとみなせる．$\omega_{1,0} = 15[\mathrm{rad/s}], \kappa = 2.76$ とし，閉軌道の一辺の長さ R^2 を変化させたとき一周期入力後の実際の変化量 Δq_4 とその近似 α を比較すると図 4 のようになる．

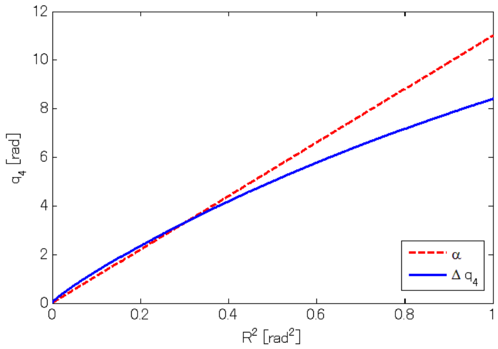

図 4　変化量 Δq_4 とその近似 α

4　制御系設計

4.1　制御手法

目標状態への姿勢制御を行う方法として文献 [5] の手法を用いる．初めに、ジンバル 4 の目標値を $q_{4\mathrm{d}}$ とする．決定した周期運動を繰り返し行い，目標値近傍まで収束させる．近傍とは，目標状態との誤差 $e = q_4 - q_{4\mathrm{d}}$ が，$e < \alpha$ となる領域である．目標値近傍からは微調整を行うよう指令を与え，許容誤差 ϵ 以下になるまで周期入力を与え続ける．微調整では角度 q_2, q_3 の周期運動の長さ R を変化させる．R の値を定めるために周期運動における q_4 の変化量 Δq_4 を用いる．微調整時の閉軌道の長さ $\tilde{R}$ は，$\tilde{R} = R\sqrt{\pi e/(g_{23}+\kappa)}$ とすることで求まる．

しかし，パラメータ誤差が存在する場合や実際は一定の角速度を持たないロータ 1 の角速度 ω_1 などにより，常に g_{23}、$\bar{g}_1$ は正しい値であるとは限らない．ゆえに微調節を行う際の $\tilde{R}$ を求めることも困難である．そこで，Lie 括弧積の q_4 方向の値を変化量 Δq_4 から推定することで q_4 に対してロバストな制御系設計を考える．図 4 より，R が微小のときは Lie 括弧積の q_4 成分を $\hat{q}_4 = \Delta q_4/\pi R^2$ と推定できるはずである．以上より，文献 [5] のモデル化誤差を考慮した以下の手法を用いた姿勢制御が有効である．

[閉軌道の繰り返しによる q_4 の目標値追従制御]

Step1　周期運動の決定
閉軌道 図 2 の一辺の長さ $2R$[rad] を決定する．
Step2　Lie 括弧積による推定
Lie 括弧積 q_4 成分の推定を行う．($\hat{q}_4 = \Delta q_4/\pi R^2$)
Step3　周期運動の繰り返し
目標との誤差 $e < \alpha$ を目指し運動継続．
条件を満たすまで Step3 を繰り返す．
Step4　微調整
$e > \epsilon$(許容誤差) ならば $\hat{R} = \sqrt{e/\hat{q}_4}$ とする．
条件を満たすまで Step4 を繰り返す．

4.2　入力トルク設計法

ここでは，入力トルク τ_1, τ_2 の導出を行う．前節までに述べた運動学モデルに基づく方法によって決定されるのは角速度入力 $u = [\omega_2, \omega_3]$ であるがこの角速度入力は仮想的な入力であり，実際にはこの仮想入力を実現する入力トルクを求めなければならない．そこで，理想的な角速度入力追従制御系を設計する．理想の角速度を $\omega_{2\mathrm{r}}, \omega_{3\mathrm{r}}$ とし，その微分を $\dot{\omega}_{2\mathrm{r}}, \dot{\omega}_{3\mathrm{r}}$，その積分を $q_{2\mathrm{r}}, q_{3\mathrm{r}}$ とする．これらに状態変数を追従させるため，次のモデルを考える：

$$\dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_{2\mathrm{r}} - D_2(\omega_2 - \omega_{2\mathrm{r}}) - K_2(q_2 - q_{2\mathrm{r}}), \tag{14}$$

$$\dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_{3\mathrm{r}} - D_3(\omega_3 - \omega_{3\mathrm{r}}) - K_3(q_3 - q_{3\mathrm{r}}), \tag{15}$$

$$\dot{\omega}_1 = -D_1(\omega_3 - \omega_{3r}) - K_1(q_3 - q_{3r}), \tag{16}$$

$$\dot{\omega}_4 = \sum_{i=1}^{3}(\dot{H}_i(q)\omega_i + H_i(q)\dot{\omega}_i). \tag{17}$$

$D_1, D_2, D_3, K_1, K_2, K_3$ は設計パラメータである．式 (14)–(17) が成り立つならば角速度 ω_2, ω_3 はその理想の値 $\omega_{2\mathrm{r}}, \omega_{3\mathrm{r}}$ に収束する．そこで式 (14)–(17) に従い角加速度 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3, \dot{\omega}_4$ を定め，これを式 (2)，(3) に代入して実際の入力トルク τ_1, τ_2 を求める．

ここで，ジンバル 2 は直接入力トルク τ_2 で制御することができるため，D_2, K_2 に関しては PD 制御系で実装することができたが，ジンバル 3 はジンバル 2 の角度 q_2 の変化が微小であっても所望の応答が得られなかったためジンバル 2 の角度 q_2 の影響を考慮するようなコントローラ D_3, D_1, K_3, K_1 を LMI(線形行列不等式) を用いて設計した [6].

4.3　粘性摩擦の導入

図 5 は実機実験において q_2, q_3 の閉軌道を $R = 0.5$ で繰り返したときの q_4 の変化と摩擦モデルを加えないシミュレーションにおける q_4 の変化を示す．両者の間には無視

できない差がある．特にジンバル 4 が回転する際に，ジンバル 4 と接続される台座との摩擦が無視できない．よって以降のシミュレーションではこの振る舞いを再現するように粘性摩擦力 f_v を

$$f_v = -\frac{\mu\omega_4}{h_4(q)}$$

としてモデル (17) に加える．ここで粘性摩擦係数 $\mu = 0.083$[N・m・s] としたとき，シミュレーションと実験値がほぼ一致したためこの値を採用する．

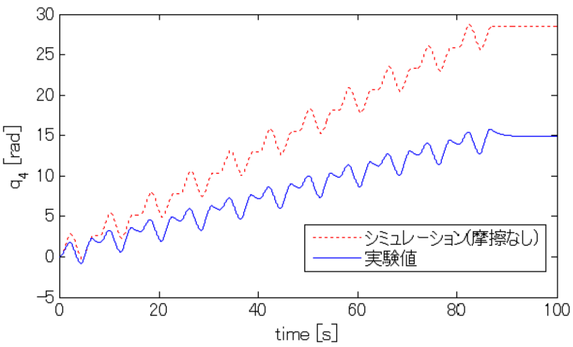

図 5 ジンバル 4 の摩擦検証–q_4 の時間応答の比較

5 シミュレーションと実機実験の結果

設計した制御系を用いたときのシミュレーションと実機実験の結果を示す．実験内容は CMG が初期状態として，ロータ 1 に初期角速度 $\omega_{1,0} = 15$[rad/s] を持たせて回転している状況を考え，ジンバル 2，ジンバル 3 に周期入力を与える．初期状態を $q = [0\ 0\ 0\ 2\pi]^{\mathrm{T}}$ とし，q_4 に対して目標値 $q_{4\mathrm{d}} = 0$ を与える．標値近傍までは，q_2, q_3 の閉軌道の初期値を $R = 0.5$[rad] と設定し，q_4 に対して変化量 $\alpha = 2.38$[rad] の大きな回転を誘う．目標値近傍に到達したら閉軌道を小さくすることで q_4 の微調整を行い，最終的に全ジンバルを零に収束させるという問題を考察する．図 6 に q_4 の応答をシミュレーション (摩擦なし・摩擦あり)，実験値で示す．横軸に時間 [s]，縦軸は角度 q_4[rad] をとる．

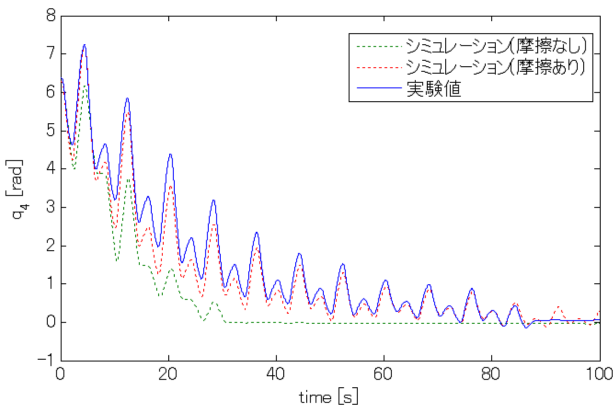

図 6 制御を行ったときの角度 q_4 の変化

摩擦力を考えないシミュレーションの場合，4 回の周期入力により q_4 は設定した許容誤差 $\epsilon = 5.0 \times 10^{-3}$ 内に入り制御が終了する．一方，実機実験では周期入力後に q_2 を完全に零に収束させられなかったために，ω_4 に予期せぬ残留運動が起きてしまい q_4 の値が零近傍から離れるという問題が生じた．そこで q_4 に対して，十分小さな周期運動を続けることで零近傍での動的な安定化を計った．ロータ 1 の角速度誤差やモデル誤差が存在しているが，これらの誤差に対してロバストな q_4 の制御手法により，摩擦ありのシミュレーションと実験結果はほぼ一致していることがわかる．また，ω_2, ω_3 の応答に関しては適切な理想入力を加えられているが残留運動を抑えるためのより安定した周期入力制御が必要である．

6 おわりに

本論文では，Control Moment Gyroscope のノンホロノミック拘束に着目して運動学システムを導出した．この運動学モデルに先行研究で用いていた入力変換を必要としない形で可制御性解析を行い，単純な定数入力と周期入力を組み合わせることで駆動源のないジンバルの回転制御を実現した．さらにこの制御手法を用いて周期フィードバック制御を提案し，q_2, q_3 の閉軌道の長さを変化させることにより q_4 は大きな移動と小さな移動が可能であることがわかった．また，シミュレーションと実機実験の結果より先行研究でなされなかった全ジンバルのレギュレーション問題についての有効性を確認した．

参考文献

[1] J. van de Loo: Control of nonholonomic control moment gyroscope. *Internal Report DCT 2006. 053,* Department of Mechanical Engineering Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands, 2006.

[2] 石川 将人：「三叉ヘビ型ロボットの推進原理と周期入力による制御」. 計測自動制御学会論文集, vol. 42, No. 5 (2006), pp. 520–528

[3] 石川, 藤野：「周期ダイナミクスの解析に基づく 2 リンク三叉ヘビロボットの制御」. 計測制御学会論文集, vol. 46, No. 5 (2010), pp. 266–273

[4] 美多 勉：「非線形制御入門—劣駆動ロボットの技能制御論」. 昭晃堂 (2000)

[5] 芦田, 石川, 杉江：「入力特性に制約を持つ非ホロノミックシステムの周期入力制御」. 自動制御連合講演会講演論文集, vol. 48(0), (2005), pp. 385–388

[6] 川田 昌克：「ディスクリプタシステムの多目的制御系設計– 冗長な座標空間を利用した LMI の解の非共通化」. 第 2 回 SICE 制御部門大会, pp.187–192 (2002)

[7] 佐野 椋一：「時間軸状態制御形に基づく Control Moment Gyroscope の制御」. 第 58 回システム制御情報学会研究発表会予稿集, pp. 342–346 (2014)