多群ワイブルモデルにおけるすべての尺度母数相違の多重比較法

M2014SS002　鬼頭広大

指導教員：白石高章

1　はじめに

本論では 2 つのパラメータ β ，η をもつワイブル分布に従う多群モデルにおけるすべての尺度母数が異なる多重比較法について考察する．本論にはシングルステップ法であるテューキークレーマーの方法とマルチステップ法である閉検定手順について述べている．ここでは β を β_0 と与え η についての統計的推論を行う．

2　ワイブル分布

密度関数と分布関数は $x > 0$ に対して，
分布関数 $F(x) = 1 - \exp\{-(x/\eta)^{\beta_0}\}$ と与えられ，微分すると密度関数 $f(x) = (\beta_0/\eta)(x/\eta)^{\beta_0-1}\exp\{-(x/\eta)^{\beta_0}\}$ が求まる．
$\gamma(i) \equiv \Gamma\left(1 + \frac{i}{\beta_0}\right)$　$(i = 1,\ 2)$ で定義する．ワイブル分布の平均と分散はガンマ関数を用いて
$E(X) = \eta\gamma(1)$，$Var(X) = \eta^2\left(\gamma(2) - \gamma^2(1)\right)$ と表すことができる．(白旗 [1])

3　多群ワイブルモデル

白石 [2] を参考に以下の表の k 群ワイブルモデルについて考察する．

表 1　k 群ワイブルモデル

群	サイズ	データ	平均	分布
第 1 郡	n_1	$X_{11}, \cdots, X_{1n_1}$	$\eta_1\gamma(1)$	$We(\beta_0, \eta_1)$
第 2 群	n_2	$X_{21}, \cdots, X_{2n_2}$	$\eta_2\gamma(1)$	$We(\beta_0, \eta_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 k 群	n_k	$X_{k1}, \cdots, X_{kn_k}$	$\eta_k\gamma(1)$	$We(\beta_0, \eta_k)$

総標本サイズ：$n \equiv \quad n_1 + \cdots + n_k$(すべての観測値の個数)

$\eta_1, \ldots, \eta_k$はすべて未知とする

k 個の水準の平均パラメータのすべての比較を考える．
1 つの比較のための検定は，

$$\text{帰無仮説}\quad H_{(i,i')}:\quad \eta_i = \eta_{i'}$$

に対して対立仮説は

$$\text{対立仮説}\quad H^A_{(i,i')}:\quad \eta_i \neq \eta_{i'}$$

となる．帰無仮説のファミリーを，

$$\mathcal{H} \equiv \{H_{(1,2)}, \cdots, H_{(1,k)}, H_{(2,3)}, \cdots, H_{(k-1,k)}\}\ \text{とおく．}$$

定数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ をはじめに決める．

$\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \cdots, \eta_k)$ とおく．任意の $\boldsymbol{\eta} \in \Theta_0$ に対して
$P_{\boldsymbol{\eta}}$(正しい帰無仮説のうち少なくとも
1 つが棄却される) $\leq \alpha$
を満たす．これを $\mathcal{H}$ に対する水準 α の多重比較検定法とよぶ．上記の左辺をタイプ I FWER とよび，上限が α 以下である必要がある．

$P(1 \leq i < i' \leq k$ を満たすすべての (i, i') に対して，
$\eta_i - \eta_{i'} \in I_{(i,i')}) \geq 1 - \alpha$
となるならば，$\eta_i - \eta_{i'} \in I_{(i,i')}$ $(1 \leq i < i' \leq k)$ を $\{\eta_i - \eta_{i'} | 1 \leq i < i' \leq k\}$ に対する信頼係数 $1 - \alpha$ の同時信頼区間とよぶ．

4　分散安定化変換による統計量の漸近理論

漸近理論を述べるために，

$$\text{(条件 1)}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n} = \lambda_i > 0 \qquad (1 \leq i \leq k)$$

を仮定する．

定理を証明するために必要となる以下の補題 1 は鬼頭 [3] で導かれた結果である．

【補題 1】 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim We(\beta_0, \eta)$ としたとき，次の式が成り立つ．

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \eta\gamma(1)) \xrightarrow{L} N\left(0, \eta^2\{\gamma(2) - \gamma^2(1)\}\right) \tag{1}$$

$$\sqrt{n}\{g(\bar{X}_n) - g(\eta\gamma(1))\} \xrightarrow{L} N(0, \{g'(\eta\gamma(1))\}^2 \tag{2}$$

$$[\eta^2\{\gamma(2) - \gamma^2(1)\}]\quad) \qquad \square$$

【補題 2】　次の 2 つの式が成り立つことを示す．

$$\sqrt{\frac{\gamma^2(1)}{\gamma(2) - \gamma^2(1)}}\sqrt{n}\{\log(\bar{X}_i.) - \log(\eta_i\gamma(1))\}$$

$$\xrightarrow{L} Y_i \sim N\left(0, \frac{1}{\lambda_i}\right) \tag{3}$$

$$\sqrt{\frac{\gamma^2(1)}{\gamma(2) - \gamma^2(1)}}\sqrt{n}\{\log(\bar{X}_{i'}.) - \log(\eta_{i'}\gamma(1))\}$$

$$\xrightarrow{L} Y_{i'} \sim N\left(0, \frac{1}{\lambda_{i'}}\right) \tag{4}$$

$\square$

補題 2 の証明は (条件 1) の下で，補題 1，中心極限定理，スラツキーの定理を適用することによって示すことができる．

5　テューキー・クレーマー型の方法

$$T_{ii'} \equiv \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2(1)}{\gamma(2)-\gamma^2(1)}}\{\log(\bar{X}_i.) - \log(\bar{X}_{i'}.)\}}{\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}} \tag{5}$$

$$A(t) \equiv k\int_{-\infty}^{\infty}\{\Phi(x)-\Phi(x-\sqrt{2}\cdot t)\}^{k-1}d\Phi(x), \quad (6)$$

$$A^*(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1,i\neq j}^{k}\left\{\Phi\left(\sqrt{\tfrac{\lambda_i}{\lambda_j}}\cdot x\right)\right.$$
$$\left. -\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}}\cdot x-\sqrt{\frac{\lambda_i+\lambda_j}{\lambda_j}}\cdot t\right)\right\}d\Phi(x)$$

とする．□

このとき次の定理を得る．

【定理 3】 任意の $t>0$ に対して，

$$A(t) \le \lim_{n\to\infty}P_0\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}|\le t\right)\le A^*(t) \quad (7)$$

が成り立ち，$n_1=\cdots=n_k$ のとき等号が成り立つ．

[証明] 補題 2 より，

$$\lim_{n\to\infty}P_0\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}|\le t\right)$$
$$=P_0\left(\max_{1\le i<i'\le k}\frac{|Y_i-Y_{i'}|}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_{i'}}}}\le t\right)$$

を得る．そして $\sigma_{i'}^2=1/\lambda_{i'}$, $\sigma_i^2=1/\lambda_i$ $(1\le i<i'\le k)$ とおき，白石 [2] の A.5 と A.6 を適用することでこの定理を得る．□

そこで α を与え，

$A(t)=1-\alpha$ を満たす t の解を $a(k;\alpha)$

とする．このとき定理より，次の漸近的な多重比較法が導かれる．

6 対数変換を使った漸近的な多重比較検定法

{ 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H_{(i,i')}^A|1\le i<i'\le k\}$ に対する水準 α の漸近的な多重比較検定は次のように与えられる．

(1) $|T_{ii'}|>a(k;\alpha)$ となる i,i' に対して $H_{(i,i')}$ を棄却し，対立仮説 $H_{(i,i')}^A$ を受け入れ，$\eta_i\neq\eta_{i'}$ と判定する．

(2) $|T_{ii'}|<a(k;\alpha)$ となる i,i' に対して帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却しない．□

(5) 式に対応して，$\boldsymbol{\eta}\equiv(\eta_1,\cdots,\eta_k)$ に対して $T_{ii'}(\boldsymbol{\eta})\equiv$

$$\frac{\sqrt{\frac{\gamma^2(1)}{\gamma(2)-\gamma^2(1)}}\{\log(\bar{X}_{i\cdot})-\log(\bar{X}_{i'\cdot})-\log(\eta_i)+\log(\eta_{i'})\}}{\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}} \quad (8)$$

とおく．このとき次の命題を得る．

【命題 4】 $t>0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}(\boldsymbol{\eta})|\le t\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}P_0\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}|\le t\right)$$

が成り立つ．

[証明]$T_{ii'}(\boldsymbol{\eta})$，$T_{ii'}$ が共に漸近的に標準正規分布に従うのでこの命題は成立する．□

命題 4 により，定理 3 に対応した次の系が成り立つことがわかる．

【系 5】 任意の $t>0$ に対して，

$$A(t)\le\lim_{n\to\infty}P\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}(\boldsymbol{\eta})|\le t\right)\le A^*(t) \quad (9)$$

が成り立ち，$n_1=\cdots=n_k$ のとき等号が成り立つ．□

7 対数変換を使った漸近的な同時信頼区間

系 5 より，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\max_{1\le i<i'\le k}|T_{ii'}(\boldsymbol{\eta})|\le a(k;\alpha)\right)$$
$$\ge A(a(k;\alpha))=1-\alpha$$

であるので，

$\log(\eta_i)-\log(\eta_{i'})$ に対する信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間は，次のように与えられる．ただし，$(1\le i<i'\le k)$ とする．

$$\log(\bar{X}_{i\cdot})-\log(\bar{X}_{i'\cdot})-\frac{a(k;\alpha)\sqrt{\gamma(2)-\gamma^2(1)}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}}{\sqrt{\gamma^2(1)}}$$
$$<\log(\eta_i)-\log(\eta_{i'})<\log(\bar{X}_{i\cdot})-\log(\bar{X}_{i'\cdot})$$
$$+\frac{a(k;\alpha)\sqrt{\gamma(2)-\gamma^2(1)}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}}{\sqrt{\gamma^2(1)}}$$

8 閉検定手順

白石 [2] を参考に，$\mathcal{U}\equiv\{(i,i')|1\le i<i'\le k\}$ とおく．そこで，3 節で考察したすべての平均が異なる多重比較検定をするときの帰無仮説のファミリー $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}\equiv\{H_{(i,i')}|1\le i<i'\le k\}=\{H_{\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}\}$$

と表現できる．$\mathcal{H}$ の要素の仮説 $H_{(i,i')}$ の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}}\equiv\left\{\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V}H_{\boldsymbol{v}}\middle|\emptyset\subsetneqq V\subset\mathcal{U}\right\}$$

と表される．さらに $\emptyset\subsetneqq V\subset\mathcal{U}$ を満たす V に対して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v}\in V}H_{\boldsymbol{v}}: 任意の\ (i,i')\in V\ に対して\eta_i=\eta_{i'}$$

と表す．これは k 個の母平均に関していくつかが等しいという仮説となる．

ここで $I_1,\cdots,I_J$ $(I_J\neq\emptyset, j=1,\cdots,J)$ を添え字 $\{1,\cdots,k\}$ の互いに素な部分集合の組とする．そして同じ I_j $(j=1,\cdots,J)$ に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H(I_1,\cdots,J)$ で表す．このとき，

$\emptyset \subsetneqq V \subset \mathcal{U}$ を満たす任意の V に対して，ある自然数 J と上記のある $I_1, \cdots, I_J$ が存在して，

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}} = H(I_1, \cdots, I_J) \tag{10}$$

が成り立つ．

そこで，(5) 式を用いて

$$T(I_j) \equiv \max_{i<i',\ i,i' \in I_j} |T_{ii'}| \qquad (j = 1, \cdots, J)$$

とおく．

$H(I_1, \cdots, I_J)$ に対して M, ℓ_j $(j = 1, \cdots, J)$ を

$$M \equiv M(I_1, \cdots, I_J) \equiv \sum_{j=1}^{J} \ell_j, \qquad \ell_j \equiv \#(I_j)$$

とする．ただし，ℓ_jは集合 I_jの要素の個数とする．

[検出力が高い閉検定手順]

(6) 式の $A(t)$ に対応して，

$$A(t|\ell) \equiv \ell \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot t)\}^{\ell-1} d\Phi(x)$$

とおく．

そこで α を与え，方程式 $A(t|\ell) = 1 - \alpha$ を満たす t の解を $a(\ell; \alpha)$ とおき　以下の条件の下，閉検定手順を行う．

(a)　$J \geq 2$ のとき，$\ell = \ell_1, \cdots, \ell_J$ に対して

$$\alpha(M, \ell) \equiv 1 - (1 - \alpha)^{\ell/M}$$

で $\alpha(M, \ell)$ を定義する．$1 \leq j \leq J$ となるある整数 j が存在して $a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)) < T(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$を棄却する．

(b)　$J = 1$ $(M = \ell_1)$ のとき，
$a(M; \alpha) < T(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$を棄却する．

上記の (a), (b) の方法で $(i, i') \in V \subset \mathcal{U}$ を満たす任意の V に対して $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$が棄却されるとき，多重比較検定として $H_{(i,i')}$を棄却する．このとき，次の定理を得る．

【定理 6】提案した閉検定手順は漸近的に水準 α の多重比較検定である．

[証明]　(b) の閉検定手順の有意水準が α であることは自明であるため，(a) の閉検定手順が α であることを示す．

$T(I_1), \cdots, T(I_J)$ が互いに独立により，

$$\lim_{n \to \infty} P_0 \left(T \left(I_j \right) \leq a \left(\ell_j; \alpha \left(M, \ell_j \right) \right), j = 1, \cdots, J \right)$$

$$= \prod_{j=1}^{J} \{ \lim_{n \to \infty} P_0 \left(T \left(I_j \right) \leq a \left(\ell_j; \alpha \left(M, \ell_j \right) \right) \right\}$$

が成り立つ．定理 3 より，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &\geq \prod_{j=1}^{J} A(a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j))|\ell_j) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{J} (\alpha(M, \ell_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{J} \left\{ \left(1 - \alpha\right)^{\ell_j/M} \right\} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} P_0(\text{ある } j \text{ が存在して，} T(I_j) > a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j))) \\
&\quad = 1 - \lim_{n \to \infty} P_0(T(I_j) \leq a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \cdots, J) \\
&\quad \leq 1 - \prod_{j=1}^{J} \left\{ (1 - \alpha)^{\ell_j/M} \right\} \\
&\quad = \alpha
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ に対する漸近的な (a) の閉検定手順は，有意水準 α である．　□

[すべての$H(I_1, \cdots, I_J)$の検定を行う閉検定手順]

多重比較検定の中でもテューキークレーマー法はシングルステップ法とよばれている．それに対して閉検定手順はマルチステップ法とよばれている．

そこで，白石 [2] を参照に本研究で行った閉検定手順では特定の帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却するためには $(i, i') \in V \subset \mathcal{U}$ を満たす任意の V に対して，帰無仮説 $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} H_{\boldsymbol{v}}$ の検定が水準 α で棄却される必要があり，本論ではすべての $H(I_1, \cdots, I_J)$ の検定を行う閉検定手順を用いることとする．

そこで，(10) 式より，

$\overline{\mathcal{H}} = \{ H(I_1, \cdots, I_J) \big|$ ある J が存在して，$\bigcup_{j=1}^{J} I_j \subset \{1, \cdots, k\}, \#(I_j) \geq 2$ $(1 \leq j \leq J)$, $J \leq 2$ のとき $I_j \bigcap I_{j'} = \emptyset$ $(1 \leq j < j' \leq J) \}$

とおく．$(i, i') \in \mathcal{U}$ に対して，

$\overline{\mathcal{H}}_{(i,i')} \equiv \{ H(I_1, \cdots, I_J) \in \big| 1 \leq j \leq J$ となる j が存在して $\{i, i'\} \subset I_j \}$

とおく．このとき，

$$\overline{\mathcal{H}} = \bigcup_{(i,i') \in \mathcal{U}} \overline{\mathcal{H}}_{(i,i')}, \qquad H_0 \in \overline{\mathcal{H}}_{(i,i')}$$

が成り立つ．検定を行う手順は以下の通りである．

手順 1. $\overline{\mathcal{H}}$ の中の帰無仮説 $H(I_1, \cdots, I_J)$ に対する検定を水準 α ですべて行う．

手順 2. すべての $(i, i') \in \mathcal{U}$ に対し次の (i)，(ii) により判定する．

(i) $\overline{\mathcal{H}}_{(i,i')}$ の中の帰無仮説がすべて棄却されていれば，多重比較検定として $H_{(i,i')}$ を棄却する．

(ii) $\overline{\mathcal{H}}_{(i,i')}$ の中の帰無仮説で棄却されないものが1つでもあれば $H_{(i,i')}$ を保留する．

具体的に k=5 の場合を考えてみる．多重比較検定として，特定の帰無仮説 $H_{(1,2)}$ が棄却される場合に考えなければならない検定を表 2 に示す．
表 2 は $\overline{\mathcal{H}}_{(1,2)}$ の中の帰無仮説をすべて載せてあり，$H_{(1,2)}$ を棄却されるには 15 個の帰無仮説を棄却する必要がある．

表 2　$k=5$ としたときの $H_{(1,2)}$ を多重比較検定を行うために必要な帰無仮説 $H(I_1,\cdots,I_J)$

p の値	$H(I_1,\ldots,I_J)$
5	$H(\{1,2,3,4,5\})$,　$H(\{1,2,3\},\{4,5\})$, $H(\{1,2,4\},\{3,5\})$,　$H(\{1,2,5\},\{3,4\})$, $H(\{1,2\},\{3,4,5\})$
4	$H(\{1,2,3,4\})$,　$H(\{1,2,3,5\})$, $H(\{1,2,4,5\})$,　$H(\{1,2\},\{3,4\})$, $H(\{1,2\},\{3,5\})$,　$H(\{1,2\},\{4,5\})$
3	$H(\{1,2,3\})$,　$H(\{1,2,4\})$, $H(\{1,2,5\})$
2	$H(\{1,2\})$

ただし，p を $2 \leq p \leq k$ となる整数とし，(∗) を次の検定群 ($k=3$ または $p=2$ 以外は複数の検定) とする
(∗)$M=p$ かつ $(i,i')\in V \subset \mathcal{U}$ を満たす任意の V に対して，(11) 式の $H(I_1,\cdots,I_J)$ を水準 α で検定する．　□

[パラメータ推定]
本論では β_i の推定を行う．そこで蓑谷 [5] で記載されている式を用いて C 言語プログラムで推定を行う．

$$\beta_i - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^{\beta_i}\log(X_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^{\beta_i}\right)^{-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)\right]^{-1} = 0$$

まずはそれぞれの群の観測値を入力して最も 0 に近似する β_i を出し，重み付き平均を求め β_0 を決める．

9　閉検定手順の実行プログラム

作成したプログラムの流れを示す．

1. $a(\ell;\alpha(M,\ell))$ の値を設定した配列を用意する．
2. パラメータ，水準 α，群の数の入力．
3. 入力した数値の判定を行い，範囲外なら繰り返し入力させる．
4. 群の数，観測値，棄却したい $H_{(i,i')}$ を入力．
5. 統計量 $T_{ii'}$ を計算する．
6. 入力指示に従い M，ℓ などを入力し検定結果を出力する．

10　解析結果

以下の期間について，地震の間隔時間のデータを用いて多重比較を行った．

表 3 解析データ

群	年月	標本数
第 1 群	2010 年 11 月と 2010 年 12 月	55
第 2 群	2011 年 4 月 16 日～ 30 日	105
第 3 群	2015 年 11 月と 2015 年 12 月	95

【テューキークレーマー型を用いた検定】

1 群と 3 群には違いが見られなかったが，震災直後である 2 群と比べたものには違いが見られた．

【閉検定手順を用いた検定】

すべての組み合わせに違いが見られた．

表 4 集計したデータ

期間	間隔平均 (h)	期間	間隔平均 (h)
2010 年 1 月	18.63	2011 年 7 月	4.58
2010 年 2 月	25.38	2011 年 8 月	4.65
2010 年 3 月	25.68	2011 年 9 月	5.98
2010 年 4 月	27.38	2011 年 10 月	7.52
2010 年 5 月	32.15	2011 年 11 月	8.79
2010 年 6 月	28.94	2011 年 12 月	8.15
2010 年 7 月	30.52	2015 年 1 月	20.07
2010 年 8 月	20.30	2015 年 2 月	17.50
2010 年 9 月	26.46	2015 年 3 月	17.89
2010 年 10 月	21.83	2015 年 4 月	16.70
2010 年 11 月	25.27	2015 年 5 月	18.16
2010 年 12 月	23.97	2015 年 6 月	15.60
2011 年 1 月	38.38	2015 年 7 月	15.61
2011 年 2 月	15.21	2015 年 8 月	14.49
2011 年 3 月	1.62	2015 年 9 月	20.21
2011 年 4 月	2.66	2015 年 10 月	22.52
2011 年 5 月	3.04	2015 年 11 月	11.75
2011 年 6 月	4.01	2015 年 12 月	21.40

上表より，震災後 1 カ月経っても異常な多さだったことがわかり，日本近海は東日本大震災が原因で，震災前よりも最近の地震の頻度が高まったことがわかった．

11　おわりに

本論ではワイブル分布に従うに多群モデルにおけるすべての尺度母数が異なる多重比較法ついて考察した．解析の結果，テューキークレーマー型で棄却できなかった群が閉検定手順によって棄却することがわかった．よって閉検定手順の方がより検出力が高いということを示すことが出来た．

参考文献

[1] 白旗慎吾 2008．『統計学』．ミネルヴァ書房

[2] 白石高章 2011．『多群連続モデルにおける多重比較法 パラメトリック，ノンパラメトリックの数理統計』．共立出版株式会社

[3] 鬼頭広大 2013．ワイブルモデルにおけるダネット型多重比較法．南山大学情報理工学部情報システム数理学科卒業論文，2014 年 3 月

[4] 白石高章 2013．多群指数モデルにおける平均パラメータの多重比較法．計量生物学，34．1-20.

[5] 蓑谷千凰彦 2003．『統計分布ハンドブック』 698-700