東海地方の和算と算額

M2014SS006 長瀬　旭弘
指導教員:小藤　俊幸

はじめに

数学と言えば西洋数学と答える人が大半である. しかし, 数学は西洋数学だけでなく様々な地域で発生しているものだ. かつて日本にも独自の数学があった. それは, 江戸時代初期に発生し, 江戸時代の終わりとともに姿を消してしまった和算と呼ばれるものである. 完全に消えてなくなってしまったわけではなく, 現代でも当時の書籍や算額といった形で残っている. そんな日本独自の数学である和算について算額をもとに西洋数学とどのような違いがあったのかを見ていく. また, 今回は東海地方の和算に注目し, 算額を実際に解いていく. そして, 県によって違いがあるか, 東海地方での和算教育がどのようなものであったかを考察していきたい.

1.　和算と算額

1.1.　和算と算額とは

和算とは, 日本で独自に発達した数学である.江戸時代初頭に成立し, 明治になった時に近代化のため西洋数学に転換された. このため和算の歴史は, 江戸時代の歴史と同じ期間である. 特徴としては, 身近な生活の話題を問題に取り込んでいるところである. 例えば, 若い女性を好きになってしまった男性の恋を題材にしているものや, 家督相続で遺産をどう分配するかといった生々しいものまである. ただの問題ではなく, 何かしらの物語がある問題が多く, 江戸時代の人々の生活や考えを感じられる問題が多い. これが, 近年において和算が見直されてきている理由にもなっている.

次に, 算額とは, 神社やお寺に奉納した数学の絵馬や額のことである. 問題だけを絵馬に書いて答え無しで奉納する人もいた. その問題を見た人が, 一生懸命に解答を考え, 算額にしてまた奉納するということもあった.この風習は江戸時代中頃から始まり, 現在全国に 1000 近くの算額が残っているとされている. 算額を奉納するというのは, 日本独自のものである. 紛失してしまったものや, 墨で書かれていたため, 現在では文字の部分が褪せて見えなくなっているものも多数ある. 和算書などに写しが残っており, それを元に復元されたというものもある. 全体的に幾何学の問題が多く, 算額の中には重要文化財になっている貴重なものもある. [1]

1.2.　和算の歴史

奈良時代	中国から数学と計算道具の「算木」が伝わる. 算博士が算生に数学を教える.
平安時代	『万葉集』に「九九」の記述がある.
1600 年	日本最古の数学書『算用記』が出来る. 割り算や利息の計算などが行われる.
17 世紀	寺子屋でそろばんの計算を教えるようになる.
1622 年	毛利重能の『割算書』が出来る.
1627 年	吉田光由の『塵劫記』が出来る. そろばんの計算が記述した本書は大ベストセラーとなり, 類似本・海賊本が多く出版された.
1641 年	吉田光由の『新篇塵劫記』が出来る. 巻末に答えのない難問を載せ, 他人に解かせる「遺題継承」が数学者の間で流行する.
1674 年	関孝和の「発微算法」が出来る. 当時のヨーロッパよりも早く行列式を発明し, 和算を大成させる.
1683 年	日本最古の数学絵馬『算額』が栃木県佐野市に奉納される.
18 世紀	建部賢弘の和算全書「大成算経」が完成. 全国的に和算・数学がブームとなり, 出版や遊算の旅に出る人も多数いた.
1872 年	明治政府は小学校の授業に西洋数学を採用. 以降, 和算は廃れていく.

[1]

2.　西洋数学と和算

西洋数学と和算の関係性について見ていく. 和算家は, 算額の問題を解くために西洋数学と同じ定理を使っていることが分かる. 例えば,「円に内接する四辺形の相対する辺の積の和は対角線の積に等しい」というトレミーの定理は和算にもあり, 有馬頼徸が昭和 5 年に出版した『拾璣算法』に記載されている.

同様に, 余弦定理も多くの和算書に使われている. 例えば, 天保 11 年に出版された平内廷臣の『算法直術正解』に記述がある. また, 正弦定理も和算家は知っていた. 天保 12 年に発行された和算の公式集『算法助術』や, その後の嘉永 2 年に秋田県仙北郡熊野神社に奉納された現存する算額にも記されている. ヘロンの公式も, 19 世紀の川北朝隣(1840-1919 年)の写本に記載されている. ピタゴラス数の決定条件は, 和算家によって独自に求められている. ピタゴラス数とは, 直角三角形の 3 辺をなすような整数である. また, ヘロン数についても同様に和算家によって得られていた. ヘロン数とは, ピタゴラス数をさらに拡張したものであるが, 一般三角形の3辺と面積を整数にしたものがヘロン数である.

このように和算家によって得られた定理のほとんどが独自に得られたものであり, 西洋から学んだものではない. そのことは, 日本では微積分をしっかりと求められていないことからも分かる. 和算家たちは,幾何図形の面積や体積を求めることを主題としていた. 例えば, 円の面積を求めるために小長方形で近似する. 明らかに, 長方形の幅を狭くするほど小長方形の面積の総和は円の面積に近づき, 幅を 0 にしたときに正しい円の面積を得るというものがある. この考えは,「円理」の基本である. 円理とは文字通り円の理論のことである. これは, 現在の大学生が微積分コースで学ぶ定積分と同じものである. 定積分とは, あ

る図形の面積を求めるときの1つの方法として，これを細かく分割して最後に分割幅を 0 にして図形の面積を求める方法である．極限の定理を使わずに，それぞれの図形についてそれぞれの方法で求めることもできる．すなわち不定積分を求めてから定積分を求める方法であるが，和算ではこの方法を使わない．このような手間が，和算では他にも見受けられるが，西洋数学よりも劣っているというわけではない．関孝和は，ライプニッツより早く行列式展開を考察しているし，他の和算家たちも多くの定理を西洋よりも早くあるいは西洋とは独立して考案していた.その定理とは，デカルトの円定理，マルファッチの定理，ケージーの定理，ソディの 6 球連鎖などである． [2]

3. 東海地方の和算と算額

3.1. 東海地方の和算家

岐阜県の代表的な数学者として，澤田吾一(1861-1931 年)を挙げることができる．澤田は数学教育と和算についての『日本数学史講話』という著書を残している．その中で彼は，「和算の歴史において，円理を一般に広めた功績は，大名の有馬と，僧侶忍澄に帰す．」と書いている．関流の秘伝を伝えるためには，先師に対する誓約が必要だったため，一般に円理がなかなか広がらなかった．澤田は，「大名と僧侶という世間から外れた人たちなので，その誓約に縛られなかった．それが円理の世間一般への公開となり，和算の発展に大きく寄与したのである．」と書いている．そして，忍澄が教育者として世間に広く公開していったとしている．忍澄は美濃の人でお寺の住職だった．忍澄の著書は『圓理眞術・弧矢弦叩底』(1819 年)といい，初学者にもわかりやすい内容となっている．その内容は，径と弦を使って弧を求める術，径と弦を与えて矢（弓形の高さ）を求める術，径弦を以て積を求める術，径と矢を与えて弦を求める術などを説明している．さらに，その術の起源をしっかり説明している．この本では和算について詳しく，また細かく書かれていたため，初めて算額を学ぶ人のための教科書であった．[3]円理を広めた功績として，有馬頼徸は有名であるが，忍澄に関しての記述は少ない．そのため，関流の教えをどのようにして学んだかは分からない．しかし，忍澄の著書を見てみると円周率の計算についての公式を求める方法が書かれており，その公式は,松永良弼(1699-1744)の著書『方円算経』(1739 年)に書かれているものと同じである．[4]松永良弼は関孝和の高弟である荒木村英(1640-1718)に学んでいるため，忍澄も関流の円理の教えを汲んでいると考えられる．

さらにもう一人，北川猛虎という名古屋を代表する和算家が存在していた．北川は西尾喜宣を師に持っている．[5]西尾喜宣の師が本多利明で，本多に今井兼庭が関流の和算を教えているため，北川も関流の和算を汲んでいると考えられる．その北川の著書『算法發陰』を見て，どのように和算を広めていたのかを見ていきたい．

3.2. 算法發陰

この書では，4 つの解法について説明されている．その解法とは，「勾股整数」，「自約法」，「別約法」，「極数法」である．最初に各方法の説明が書いてあり，その後に例題と解法が書いてある．専門用語や分かりにくい部分には括弧書きで説明が書いてあり，和算を初めて学ぶ人にも分かりやすい教科書のような内容だと感じた．東海地方で和算を広めるために書かれたのではないかと考える．また，この書に出てきている人名の書き方に注目してみると，関孝和のことを「関先生」と書いている．この書での問題の解法を見てみても関孝和が考案した傍書法を使っている．このことから北川は,関流の教えを汲んでいることが明らかとなった．この書が発行されていることから，東海地方でも関流の和算教育がしっかりと行われていたことが分かる．[6][7]

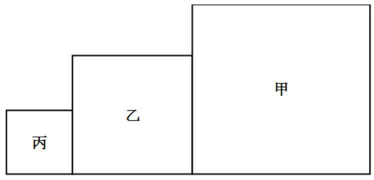
3.3. 東海地方の算額

東海地方にもいくつか算額が残されている．その算額に書かれた問題をいくつか解いたので紹介していく．

問題 1

正方形 甲，乙，丙がある．その面積の和は 61(歩)，甲乙の 1 辺の差は 2(寸)，乙丙の 1 辺の差は 1(寸)であるとき，丙の 1 辺を求めよ．

この算額は，1779 年に齋藤土吉の門人本間資忠が愛知県岡崎市六所神社に奉納したものである．[8]



解答

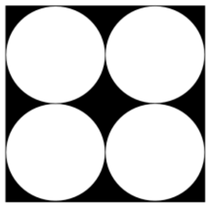
丙の正方形の一辺をxとする．

$$x^2+(x+1)^2+(x+3)^2=61$$
$$(3x+17)(x-3)=0$$
$$\text{ここで}\,x>0\,\text{より}\,x=3$$

問題 2

図のように正方形の内に 4 個の等しい円を内接させる．残りの面積を黒積とする.いま黒積を S とするとき，円の直径 2r を S で表わせ．

この算額は，1841 年に井口百一郎という 13 歳の子供が岐阜県養老町田代神社に奉納したものである．[5]



解答

4 つの円をそれぞれ含むように 4 つの正方形に分ける．1 つの正方形の 1 辺は 2r となる．

$$(2r\times 2r-\pi r^2)\times 4=S$$
$$(2r)^2=\frac{S}{4-\pi}$$

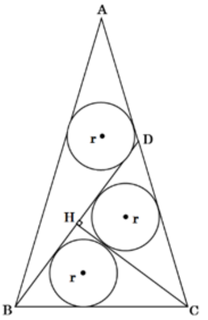
$2r>0$より

$$2r=\sqrt{\frac{S}{4-\pi}}$$

問題 3

図のように，二等辺三角形 ABC があり線分 BD とこれに直行する線分 CH でこの三角形を 3 つの部分に分け

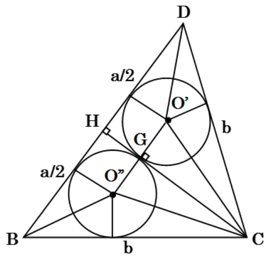
る. いまこの 3 つの三角形が同じ半径 r の円を内接するとき, この r を線分 CH で表わしてみよう.



この算額は, 1806 年に日下誠(1764-1839 年)の門人江原政教が愛知県名古屋市熱田神宮に奉納したものである. [2]

解答

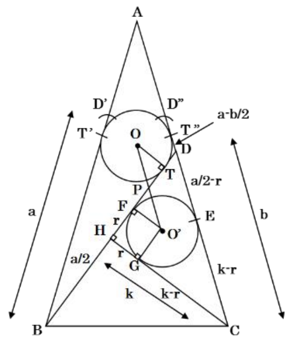
まず, ⊿CDBについて考える.



頂点 C と 2 つの円の中心 O’, O”をそれぞれ線分で結ぶと, それらの線分は∠DCHと∠BCHの二等分線となる. O’O”と CH の交点を G とすると,

$⊿\mathrm{CO'G} \equiv ⊿\mathrm{CO''G}$ となり, $\angle \mathrm{HCD} = \angle \mathrm{HCB}$.

また, $\mathrm{BD} \perp \mathrm{HC}$ なので, $\angle \mathrm{CHD} = \angle \mathrm{CHB} = 90°$, 残りの角も等しいので $\angle \mathrm{CDH} = \angle \mathrm{CBH}$ となり, ⊿BCDは二等辺三角形であることが分かる. ここで, $\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{b}$, $\mathrm{BD} = a$, $\mathrm{CH} = \mathrm{k}$ とおく.



図のように 1 つの円の中心を O とする. O から BD に垂線を下ろし, その足を T とする. ⊿ABCは二等辺三角形である. 図のように B を中心として $\mathrm{BD} = \mathrm{BD'} = a$ となるような点D′を AB 上にとると $\mathrm{D'T'} = \mathrm{DT}$ となる. AC 上に $\mathrm{BD'} = \mathrm{CD''} = a$ となるような点D″をとると $\mathrm{D'T'} = \mathrm{D''T''}$ となる. DA と DB は円 O の接線なので, T とT″は点 D から等距離となり, $\mathrm{DT} = \mathrm{DT''}$. よって, $\mathrm{DT''} = \mathrm{D''T''}$ となる.

$$DT = DT'' = \frac{CD'' - CD}{2} = \frac{a-b}{2}$$

⊿DCHに注目する.

三平方の定理より　$DH^2 + CH^2 = CD^2$

図のように円O′の中心O′は⊿DCHの内心で, 四角形 HGO’F は1辺の長さが r の正方形なので, $\mathrm{HF} = \mathrm{HG} = \mathrm{r}$,

$\mathrm{DF} = \mathrm{DE} = \frac{a}{2} - \mathrm{r}$, $\mathrm{CG} = \mathrm{CE} = \mathrm{k} - \mathrm{r}$.

△DCH において, $\mathrm{CH} = \mathrm{k}$, $\mathrm{HD} = \frac{a}{2}$,

$\mathrm{CD} = \mathrm{k} - \mathrm{r} + \frac{a}{2} - r = \frac{a}{2} + k - 2r$ より

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2 = \left(\frac{a}{2} + k - 2r\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4} + k^2 = \frac{a^2}{4} + k^2 + 4r^2 + ak - 4kr - 2ar$$

$$4\mathrm{r}^2 + (-4k - 2a)\mathrm{r} + ak = 0・・・①$$

a について解くと

$$4r^2 - 4kr - 2ar + ak = 0$$

$$2ar - ak = 4r^2 - 4kr,\quad a = \frac{4r(r-k)}{2r-k}・・・(*)$$

次に図のように, もう 1 つの円の中心をO′とし, O と O’を線分で結ぶ. BD と OO’の交点を P とする. BD は円 O の接線なので, 直角三角形 OTP ができる.

△OTP において$\mathrm{OT} = \mathrm{r}$, $\mathrm{TP} = (\mathrm{HD} - \mathrm{DT} - \mathrm{HF}) \cdot \frac{1}{2}$

$$TP = \left(\frac{a}{2} - \frac{a-b}{2} - r\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{b}{2} - r\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{4} - \frac{r}{2}$$

$$\mathrm{OP} = \left(\frac{a-b}{2} + \frac{a}{2} - r\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{r}{2}$$

三平方の定理より　$OP^2 = TP^2 + OT^2$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{4} - \frac{r}{2}\right)^2 + r^2$$

$$(a - 2r)(a - b) = 4r^2$$

$\mathrm{b} = \mathrm{k} - \mathrm{r} + \frac{a}{2} - r = k + \frac{a}{2} - 2r$を代入する.

$$(a - 2r)\left(\frac{a}{2} - k + 2r\right) = 4r^2・・・②$$

①より$4r^2 = (4k + 2a)r - ak$・・・①′

①’を代入する.

$$(a - 2r)\left(\frac{a}{2} - k + 2r\right) = (4k + 2a)r - ak$$

$$\frac{a^2}{2} - ar - 2kr - 4r^2 = 0$$

(＊)を代入する.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4r(r-k)}{2r-k}\right)^2 - \frac{4r(r-k)}{2r-k}r - 2kr - 4r^2 = 0$$

$$\left(\mathrm{k} + \sqrt{2}r\right)\left(k - \sqrt{2}r\right)(k - 4r) = 0$$

$$\mathrm{k} + \sqrt{2}r > 0 \text{ なので } \mathrm{k} = \sqrt{2}r,\ 4\mathrm{r}$$

図より $\mathrm{k} = 4\mathrm{r}$ が適するものであり, $\mathrm{r} = \frac{CH}{4}$ が求められる.

問題 4

今有圓円内容五円以二斜抱之　只云甲円径若干乙円径若干丙円径若干問得丁円径術如何

答曰如左術

術曰以甲円径除乙円径平方開之名極以丙円径除乙円径平方開之加極内減一个余自乗之以除乙円径得丁円径合問

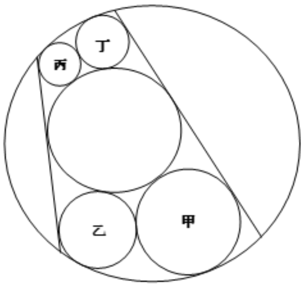
今, 図のように円があり, その中に 5 つの円(2 つの斜線で囲まれている)がある. 条件として, 甲円の直径＞乙円の直径＞丙円の直径とする. 丁円の直径はどのように求めるか.

解法は次のようである.

乙円の直径を甲円の直径で割り, 平方根を求める. (これを極とする.) 乙円の直径を丙円で割り, 平方根を求め極

を加え，一個を減ずる．余りを自乗し乙円の直径を割る．丁円の直径を得られれば問いに合う．[2][9]

この算額は，1841 年に御粥安本(1764-1839 年)の門人三輪恒徳が愛知県名古屋市熱田区熱田神宮に奉納したものである．



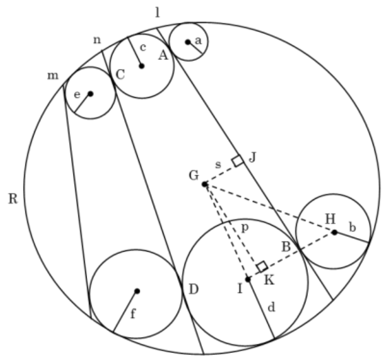
問題を解くに当たって，福島市の篠葉沢立子山八幡宮に奉納された算額を参考にした．

解答

まず，丁円と丙円の接点と甲円と乙円の接点を直線で結び n とする．続いて接線 m との接点である点 A, B と外側の大円と接するような円を上と下に 2 つ書く．

大円の半径を R，内接する 2 つの円の半径を a, b とし，この 2 つの円の共通接線に大円の中心から下した垂線の長さを s とする．半径 R, d, b の円の中心を G, I, H とする．G から半径 c, d の円の共通接線への垂線の足をJとする．GJ = s

G から直線 BH への垂線の足を K とする．GK = p



⊿GKIにおいて三平方の定理より

$$GI^2 = GK^2 + KI^2$$

$$(R-d)^2 = p^2 + (d-s)^2$$

$$\mathrm{d} = \frac{R^2 - p^2 - s^2}{2(R-s)}$$

⊿GKHにおいて三平方の定理より

$$GH^2 = KH^2 + GD^2$$

$$(R-b)^2 = (b+d-d+s)^2 + p^2$$

$$\mathrm{b} = \frac{R^2 - p^2 - s^2}{2(R+s)}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{R^2 - p^2 - s^2}{2(R-s)} \times \frac{2(R+s)}{R^2 - p^2 - s^2} = \frac{R+s}{R-s}$$

右辺の R, s は 4 つの円に関して定数なので，この分数は定数である．図の弦に対して反対側でも成立するので，

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \qquad \mathrm{ad} = \mathrm{bc}, \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

これを，甲乙丁丙の 4 つの円に用いて

$$\frac{b}{f} = \frac{c}{e}, \qquad \mathrm{ed} = \mathrm{cf}, \qquad \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$$

これより，

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$$

が成り立つので，丁円の半径の求め方は

$$\frac{甲}{丁} = \frac{乙}{丙}, \qquad \frac{甲 \times 丙}{乙} = 丁$$

となる．出てきた値を 2 倍すれば丁円の直径が求められる．

4. おわりに

今回，算額の問題を解いてみて感じたのは，いかにして三平方の定理を使えるようにするかを考えるのが難しいということだった．難しい問題になってくると図形を追加して解いていくことが必要になる問題もあった．そして，県によって難易度の差と特色が多少あるように感じた．岐阜県の算額は，子供が奉納したものが多く残っている．子供も和算を習い，簡単な図形から複雑な図形の問題まで幅広く学習していたことが分かる．たくさんの図形を描く複雑な形をした問題が印象的であった．愛知県の算額は，問題の難易度の高いものが多いように感じた．これは，愛知県に名古屋城があり，和算家が多かったからではないかと考える．三重県の算額は，他の 2 県にはないような問題が多いように感じられた．1705 年に「お蔭参り」が流行したため，全国から算額を奉納しに来る人がいたからではないかと考える．[10]このように東海地方でも和算が一般に広まっていたことが分かる．これだけ浸透していた和算は，江戸時代の終わりとともに消えてしまったが,近年注目されてきている．鶴亀算は，現在も使われている和算の有名なものとして挙げられる．学校でも様々な活動が行われている．西洋数学を和算から見ることも出来るので，このような取り組みがこれからも増えていくと良いと考える．

参考文献

[1] 和算ナビ http://wasan.info/

[2] 深川英俊，トニー・ロスマン，“聖なる数学：算額－世界が注目する江戸文化としての和算，” 森北出版株式会社，pp. 24-27，149，187，204-205，280-283，2010.

[3] はまぐりの数学 美濃・飛騨の国の和算の歴史 http://sky.geocities.jp/bunryu1011/minohidawasan.htm

[4] 国立国会図書館：江戸の数学 第 2 章 http://www.ndl.go.jp/math/s1/1.html

[5] 深川英俊，“例題で知る日本の数学と算額-付：全国算額一覧，” 森北出版株式会社，pp．112，118-119，1998.

[6] 佐藤健一，安富有恒，疋田伸汎，松本登志雄，“和算用語集，” 研成社，2005.

[7] 北川孟虎，“算法發陰” http://www.wasan.earth.linkclub.com/archive/sanpohatuin.pdf

[8] 木村正，“算額探訪小記，” 2011.

[9] 和算の館 http://www.wasan.jp/

[10] 福島完，“三重県に現存する算額の研究，” 三重大学大学院教育学研究科，pp. 87，2007.