

離散分数フーリエ変換の数値解析

M2014SS010 白田勉

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

分数フーリエ変換は非整数次数を含み、従来のものにくらべより一般的なフーリエ変換である。これは光学や信号処理などの分野で実際に使われている。

本研究では分数フーリエ変換の定義について述べ、離散型の分数フーリエ変換についていくつかのタイプを紹介する。離散型の分数フーリエ変換の中でも固有値、固有ベクトル型の離散分数フーリエ変換を中心に考え、その後Wang, Gong によって提案された定理を紹介し、その定理に基づいたプログラミングを作成し実際に数値解析を行う。通常のフーリエ変換と分数フーリエ変換はどのような違いがあるか比較する。

2 分数フーリエ変換

分数フーリエ変換 (FrFT) とは、複素数をもつ高速フーリエ変換 (FFT) に比例したアルゴリズムによって計算されるものである。通常の離散フーリエ変換 (DFT) は整数原始根 $e^{-2\pi i/n}$ に基づいているが、分数フーリエ変換 (FrFT) は、分数原始根 $e^{-2\pi i\alpha}$ (α は任意) に基づいている。

FrFT とそれに対応するアルゴリズムは素数範囲をもつ DFT を計算することができ、非整数周期をもつ列の分析、高分解能の三角補間の実行、ノイズの多い画像のライン検出などにも使われている。

望み通りの結果をより効率的に DFT の結果から直接計算できない限り FFT アルゴリズムは通常使用される。多くのアプリケーションをより効率的に計算することが可能な技術があり、それは標準的な FFT では効率的な計算ができない状況で適用することができる。その技術こそが FrFT である。

長さ m の複素数を含む数列 $x = (x_j, 0 \leq j \leq m)$ として定義され

$$G_k(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{-2\pi i j k \alpha} \quad (1)$$

と書くことができる。

パラメータ α は有理数に制限されず、実際には任意の複素数であってもよい。この変換はすべての整数 k で定義されており、通常、最初の非負の値 m を計算する。($0 < k < m$)

$$F_k(x) = \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{-2\pi i j k / m} \quad (2)$$

$$= G_k(x, \frac{1}{m}) (0 \leq k \leq m) \quad (3)$$

$$F_k^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{2\pi i j k / m} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{m} G_k(x, \frac{-1}{m}) (0 \leq k \leq m) \quad (5)$$

もし α が有理数なら FrFT は DFT に単純化することができ、従来の FFT を用いて評価できる。

$\alpha = r/n$ と仮定する。整数 r と n は互いに素数で $n \geq m$ である。 p は整数とすると、 $0 \leq p \leq n, pr = 1 \pmod{n}$ 。

$$G_k(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{\pi i j k r / n} \quad (6)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} x_{pj} e^{-2\pi i (pj) k r / n} \quad (7)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} x_{pj} e^{-2\pi i j k r / n} \quad (8)$$

$$= F_k(y) (0 \leq k < n) \quad (9)$$

y は長さ n の数列、 $y_i = x_{pj}$ で定義されている。 y 上の n 点 FFT を実行することによって FrFT の最初の n の値を計算することができる。

3 離散分数フーリエ変換

離散型の FrFT を離散分数フーリエ変換 (DFrFT) と呼ぶ。 DFrFT にはさまざまなタイプがあるのでここで紹介する。

3.1 固有ベクトル分解型 DFrFT

DFT 行列の固有値、固有ベクトルを見つけることによって DFrFT を計算する。

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$
(11)

$\frac{1}{\sqrt{N}}$ は単なる正規化因子である。(10) 式は

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{N}} & e^{i\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{N}2} & e^{i\frac{2\pi}{N}4} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$
(12)

と行列形式で表すことができ、(10)-(12) から

$$X_F = F_N X$$
(13)

と表せる。 X と X_F は両方 $N \times 1$ の列ベクトルで上記の式から F_N が対角化可能ならば分解できる。

$$F_N = UDU^T$$
(14)

D は対角行列の固有値、 U は直行行列である。(12) 式より F_N が対称行列であることは明らかであり行列の理論より直行行列による対称行列の対角化ができる。行列のべき乗を計算すると

$$F_N^\alpha = UD^\alpha U^T$$
(15)

となる。

3.2 線形結合型 DFrFT

線形結合型 DFrFT とは線形結合に基づいて導出された DFrFT で時間周波数平面における信号の回転と解釈される。

この定義は直行、可逆性の性質を満たしているが結果は連続的には合致していない。数学的に定義すると

$$F^\alpha[X(n)] = \sum_{n=0} K(n, k)^\alpha x(n)$$
(16)

$$K^\alpha[n, k] = a_0(\alpha)(n-k) + \frac{a_1(\alpha)}{\sqrt{N}} \exp(-i\frac{2\pi}{N}nk) + a_2(\alpha)\sigma[(n+k)_N] + \frac{a_3(\alpha)}{\sqrt{N}} \exp(-i\frac{2\pi}{N}nk)$$
(17)

と表される。

3.3 群理論型 DFrFT

グループ理論の概念は、DFT の乗算や周期的なチャープのような DFrFT の定義を導出するために使われる。

DFrFT は FrFT の可逆性、ウィグナー分布の回転特性を満たすプロセスにより決定する。しかしながらこのタイプの DFrFT は、いくつかの指定された角度と等しい点の数 N が素数でない DFrFT の分数を整えるときにしか生成されない。

3.4 インパルス行列型 DFrFT

インパルス行列型 DFrFT は、入力する関数が周期的で等間隔のインパルス行列であり連続 FrFT の特殊なケースとして見る事ができる。

4 DFrFT を使った信号の周波数解析

離散分数フーリエ変換を使った周波数実験 [2]。アナログ信号のスペクトルをデジタル処理で計算すると信号の有効期限記録はサンプリングされ、得られたサンプルは周波数領域に変換される。

長さ L の矩形窓を定義すると

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$
(18)

そして以下のように窓化信号を定義する

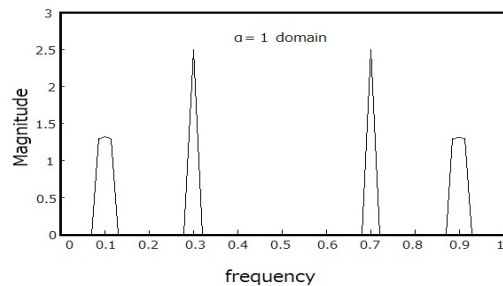
$$x_L(n) = x(n)w(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$
(19)

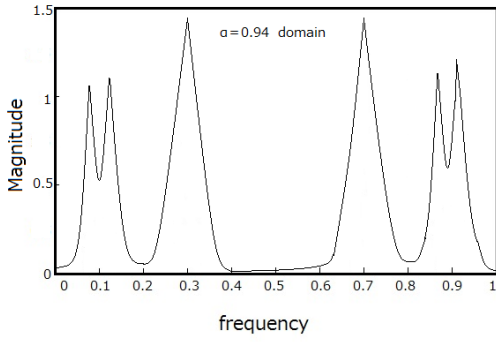
分解可能な最小周波数の差は周波数解析を行うために選択された信号の長さによって制限される。スペクトル分解を改善するためには通常フーリエ変換が利用される。

次のような信号について考える。

$$x(n) = \cos(w_0 n) + \cos(w_1 n) + \cos(w_2 n)$$
(20)

$w_0 = 0.2\pi, w_1 = 0.22\pi, w_2 = 0.6\pi$ として、長さ $L = 100$ のハニング窓をとりシミュレートする。





図からわかるように通常のフーリエ変換では w_0 と w_1 は分解できないが、分数フーリエ変換の場合 w_0 と w_1 は分解可能になっていることがわかる。

5 Wang, Gong による定理

通常、フーリエ行列の固有ベクトルを求めるのは困難であるが、Wang, Gong によって公式が与えられた。提案された DFT の対角化問題への新たなアプローチは、 $p \bmod 4$ が奇数であるときに限られる。

$$F[\varphi](j) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i}{N} ij} \varphi(i) \quad (21)$$

信号処理では時間領域と周波数領域の DFT によって変換される。

標準基は F の 4 次の演算子であり、多くの場合 $+1, -1, +i, -i$ という 4 つの違った固有値を持っている。これらの固有値は $n \bmod 4$ の値に依存している。

与えられた素数 p について θ と η は $p-1$ 番目, p 番目の原始根を表す。つまり

$$\begin{aligned} \theta &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p-1}\right) \\ \eta &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$\varphi_x(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p}} \eta^{2^{-1} \alpha^k i^2}, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \sum_{j=1}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \eta^{a^k (j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^k}, & 0 < x < p \end{cases}$$

とすると、 $\varphi_x(i)_{(0 \leq i < p)}(0)$ は DFT の固有ベクトルの集合である。

これは、 $p \equiv 1 \pmod{4}$ の場合における DFT の標準基底の解析式である。対応するそれぞれの固有値は下の定理で決定する。

定理

$\varphi_x(0 \leq x < p)$, $0 \leq x < p$ は固有値 $(-i)^x$ に対する固有ベクトルである。ここで $i = \sqrt{-1}$ すなわち $F\varphi = (-i)^x \varphi_x$

証明

$x=0$ ならば、

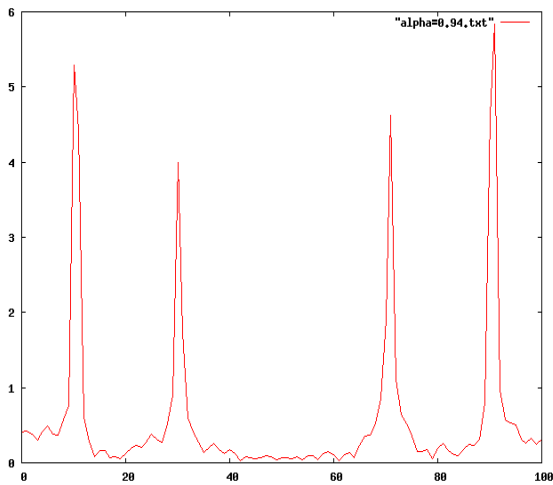
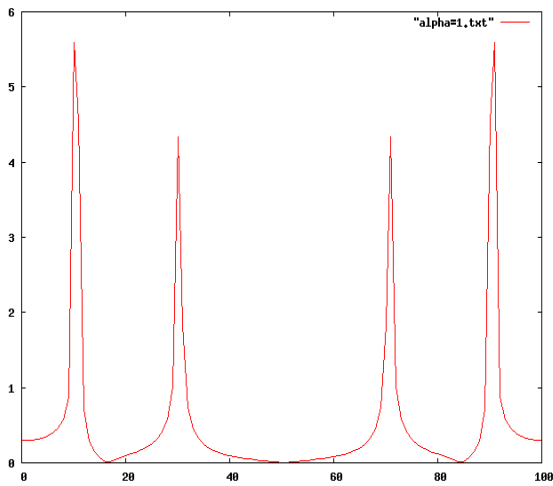
$$\begin{aligned} F[\varphi_0](t) &= \frac{1}{p} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{2^{-1} \alpha^k i^2 + it} \\ &= \frac{1}{p} \eta^{2^{-1} \alpha^k t^2} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{2^{-1} \alpha^k i^2 + it - 2^{-1} \alpha^k t^2} \\ &= \frac{1}{p} \eta^{2^{-1} \alpha^k t^2} \sum_{t=0}^{p-1} (\eta^{2^{-1} \alpha^k})^{(i - \alpha^k t)^2} \\ &= \frac{1}{p} \eta^{2^{-1} \alpha^k t^2} \sum_{t=0}^{p-1} (\eta^{2^{-1} \alpha^k})^{t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \eta^{2^{-1} \alpha^k t^2} \\ &= \varphi_0(t) \end{aligned}$$

$x \neq 0$ ならば、

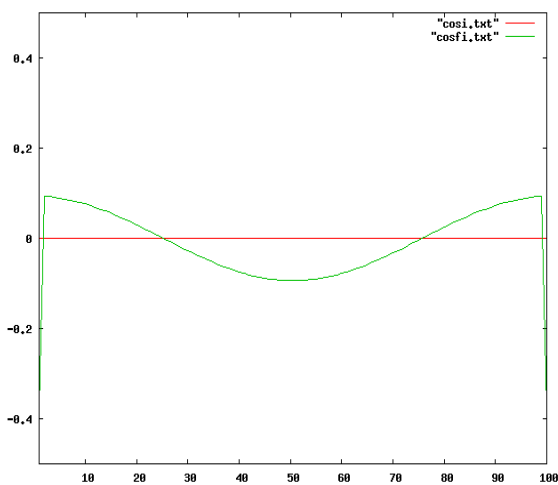
$$\begin{aligned} F[\varphi_x](t) &= \frac{1}{p\sqrt{p-1}} \sum_{t=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \eta^{a^k (j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^2 + it} \\ &= \frac{1}{p\sqrt{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{a^k (j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^2 + it} \\ &= \frac{1}{p\sqrt{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} a^{-kj} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{(a^k j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^2 + it} \\ &= \frac{\theta^{-kx}}{p\sqrt{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{(a^k j^2 - 2ji + 2^{-1} \alpha^k i^2) + it} \\ &= \frac{(-i)^x}{p\sqrt{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \eta^{a^k (j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^2} \sum_{t=0}^{p-1} \eta^{(2a^k)^{-1} (a^k i + t - 2j)^2} \\ &= \frac{(-i)^x}{\sqrt{p(p-1)}} \sum_{j=0}^{p-1} \theta^{x \log_a j} \eta^{a^k (j-1)^2 - 2^{-1} \alpha^k i^2} \\ &= (-i)^x \varphi_x(t) \end{aligned}$$

6 プログラムの実装

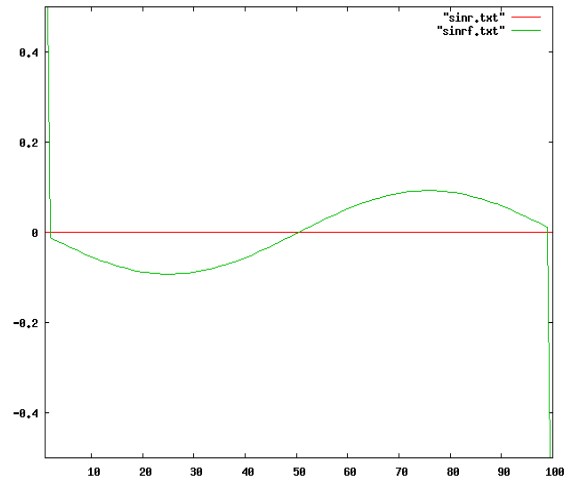
通常のフーリエ変換と分数フーリエ変換の両方で実験しどのような違いがあるのかを確認する。式 (20) を使い実際に固有ベクトルが与えられるのかを確認する。通常のフーリエ変換だと対称なグラフになっているが、分数フーリエ変換のグラフは非対称になっている。



次は偶関数 $\cos(2\pi j/N)$ で実験する. 通常のフーリエ変換をすると虚数部分が消えて0になる. しかし分数フーリエ変換をすると虚数部分は消えずに値をとる.



次は奇関数 $\sin(2\pi j/N)$ でも実験を行う. 今度は実数部分に注目する. 通常のフーリエ変換をするとは実数部分は消えて0になる. しかし分数フーリエ変換をすると消えずに値をとる.



7 おわりに

離散分数フーリエ変換についていくつかのタイプがあるなかで DFT 行列から固有値, 固有ベクトルを見つけることによって計算するタイプを中心に述べた. 通常, 固有ベクトルを求めるのは難しいとされていたなかで, Wang, Gong によって提案された定理は革新的なものと思われる. 実験では通常のフーリエ変換では対称なグラフになるが離散分数フーリエ変換では対称性がなくなるという結果になった. 奇関数と偶関数での実験でも通常のフーリエ変換とはまったく違う結果となった. このように離散分数フーリエ変換は通常のフーリエ変換では得られない結果を得ることができるのでさまざまな分野での応用できると考えられる.

参考文献

- [1] H.M.Ozaktas, M.Alper Kutay, Z.Zalevsky, The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal processing, John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
- [2] P.Mohindru, R.Khanna, S.S.Bhatia, Introduction to Fractional Fourier Transform, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrcken, 2013.
- [3] Z. Wang, G. Gong, A note on the diagonalization of the discrete Fourier transform, Appl.comput.Harmon. Anal28(2012), 114-120
- [4] 高木貞治, 初等整数論講義, 第2版, 共立出版, 1971