

生物モデルを用いた最短経路問題の解法

M2014SS012 横山 優希

指導教員：小藤 俊幸

1 はじめに

本研究で扱う粘菌には基本的な特性 [1] として、粘菌自身の体を流動的に運動させて餌を捕食する性質を持っている。さらに、この粘菌には迷路状の地形の入り口と出口に餌を配置すると最短経路を通して迷路を進むと言う性質がある。本研究では、その性質について述べられた論文 [2] の数学モデルから、数値解析の 1 つとして、伝導率の更新をオイラー法を用いた近似で数値実験を行った。しかし、オイラー法ではノード数が増加すると明確な解が得られなくなる。安定性やパスの削除の早さを求めるために γ の値に注目し、伝導率の更新を指数オイラー法 [3] へと変えて伝導率の正値性やパスの削除の早さを比較している。その結果、指数オイラー法による近似は安定性のあるものと分かった。

2 粘菌と最短経路問題

2.1 粘菌のもつ性質と有用性

粘菌の持つ性質とは何か、それは複数箇所餌を配置されるとすべての餌を得るために餌から餌へと体を伸縮させるということである。この性質は最短経路問題の解決法の一つとしてあげることができる。最短経路問題を解くときにもっとも有名とされているものはダイクストラ法である。しかし、この方法では正確な最短経路を識別することは可能であるものの、複数箇所の目的地つまりノード数が多ければ多いほど必要な計算時間が過剰になってしまう。ここで、最短経路を見つけるときの条件を三つ述べる。

- 確実に最短経路を見つけるということ。
 - 経路検索の迅速性。
 - 情報の更新からの最短経路の再設定に対する適応性
- 粘菌はこの三つの条件を満たして経路を見つけることができる。

2.2 粘菌を用いた実験方法

ここからは、具体的に実験方法について述べていく。粘菌により最短経路を見つける実験方法の一つとして次のものがある。初めに迷路の中に餌を二ヶ所配置し、そしてそこに粘菌をおく。すると粘菌は様々な経路を通して餌まで辿り着こうとする。しかし、時間が経つと最短経路を通る粘菌の管以外はなくなり、一本の道となる。そのことで最短経路を見つけることができるというわけだ。また、粘菌はある光や危険な化学物質を嫌うため [4] それを粘菌の通り道に配置するとその箇所を避けて最短経路を見つけようとするのである。しかし、この実験には欠点があり餌の量が均一に配置されていなければ多く餌のあるところに粘菌が行ってしまうこと、さらに迷路内での実験だと粘菌が壁を乗り越えてしまう可能性があるというものだ。

3 数学的モデル

ノードの数 (餌の数) を N_i から N_j まで設置さらに、流れは N_1 から N_2 へと流れていくものとしてポアズイユ流れの法則を用いて仮定すると (1) 式が導かれる。

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j) \quad (1)$$

この時、 p_i は N_i の圧力、 p_j は N_j の圧力を示し、 L_{ij} は N_i, N_j 間の長さ (M_{ij})、 D_{ij} は伝導率を示す。また Q_{ij} は流量を示している。また、各ノードに対してキルヒホッフの法則を考慮すると、以下のような式を得られる。

$$\begin{cases} \sum_i Q_{ij} = 0 & (j \neq 1, 2 \text{ のとき}) \\ \sum_i Q_{i1} + I_0 = 0 \\ \sum_i Q_{i2} - I_0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

I_0 は最初のノードから流れる量である。つまり、始点と終点は一方向的に流れ続け、流れ込みつづけるため I_0 を式に入れることで和を 0 としており、途中のノードでは流れ込んでくる量、流れていく量が同じなため総和が 0 になっている。さらに (1) 式 (2) 式を組み合わせると、(3) 式のようにまとめられる。

$$\sum_i \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j) = \begin{cases} -I_0 (j=1) \\ I_0 (j=2) \\ 0 (j \neq 1, 2) \end{cases} \quad (3)$$

また、 Q_{ij} によって D_{ij} が変動したとすると、

$$\frac{d}{dt} D_{ij} = f(|Q_{ij}|) - \gamma D_{ij} \quad (4)$$

という式が得られ、 $f(Q)$ は増加関数であるため、 $f(0) = 0$ である。この式から伝導性 D_{ij} が減少する傾向にある。 $f(Q) = \alpha|Q|$ として (3) 式に代入すると、

$$\frac{d}{dt} D_{ij} = \alpha|Q_{ij}| - \gamma D_{ij} \quad (5)$$

この式は Q_{ij} によって変動される D_{ij} を求めるための式となっていて、 α, γ は正の定数である。

4 粘菌アルゴリズムの実装

4.1 粘菌アルゴリズム概要

最短経路問題を解く際の手順は以下の通りである。

- 初期時刻の伝導率 D_{ij}^0 を (適当に) 与え、 N_i の圧力を基準にする。つまり $p_i = 0$ とする。
- 後に示す連立 1 次方程式を解いて、圧力 p_i^0 を求め、流量 Q_{ij}^0 を計算する。

(c) オイラー近似により, 時刻 t_1 での伝導率 D_{ij}^1 を求める. 以下, 同様に時刻 t_n での圧力 p_i^n , 流量 Q_{ij}^n を求め, オイラー近似により, 時刻 t_{n+1} での伝導率 D_{ij}^{n+1} を求める.

(b) で記した連立 1 次方程式というのは,

$$Q_{ij}^n = \frac{D_{ij}^n}{L_{ij}^n} (p_i^n - p_j^n) \quad (6)$$

を以下の式に代入して,

$$\begin{cases} \sum_i Q_{ij}^n = 0 & (j \neq 1, 2 \text{ のとき}) \\ \sum_i Q_{i1}^n + I_0 = 0 \\ \sum_i Q_{i2}^n - I_0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

それで得られた式

$$\sum_i \frac{D_{ij}^n}{L_{ij}^n} (p_i^n - p_j^n) = \begin{cases} -I_0 (j=1) \\ I_0 (j=2) \\ 0 (j \neq 1, 2) \end{cases} \quad (8)$$

これを各ノードにおいて p_i^0 の連立 1 次方程式を立てる. その方程式をガウス消去法で解き p_i^0 を求める. 流量 Q_{ij}^0 が求められたら, 次の時刻の伝導率を更新するために, 以下のオイラー近似を用いる.

$$D_{ij}^{n+1} = D_{ij}^n + \delta t (\alpha |Q_{ij}^n| - \gamma D_{ij}^n) \quad (9)$$

ここでは $\alpha = 1.0, \gamma = 1.0, \delta = 0.1$ としている. 次に (4.4) 式で得られた D_{ij}^{n+1} を用いて, 同様に計算をしていく.

4.2 プログラムの実装

今回作成したプログラムは, まずあらかじめ決められたノード間の距離, 伝導率を打ち込み, 読み込ませる. $a[i][j]$ という変数を用いるのだが, この時の $a[i][j]$ というものは, ノード N_i にでの (4.3) における圧力 p_j の係数を代入する配列として扱っている. 各ノードにおいて, $p[i]$ の係数の値を代入していくのだが, ノード i と p_j が一致する場合 ($i = j$). つまり, 対角成分においては $a[i][i]$ を $a[i][i] = \sum_j \frac{D_{ij}}{L_{ij}}$

それ以外の非対角成分の時は $a[i][j] = -\frac{D_{ij}}{L_{ij}}$ のように代入する. その後 $p[i]$ の初期値をノード 0 を 1.0, それ以外を 0.0 とし $a[i][j]$ と $p[i]$ との連立方程式をガウス消去法で解き, (4.1) 式を用いて Q を求める. その後, 伝導率 D の更新を (4.4) 式を用いて求める. この手順を 100 回ループさせたものがこのプログラムとなる.

5 実験結果

図 1 のような最短経路問題があったとする. この問題においては D_{ij}^0 を適当に与えて, 先ほど説明したプログラムで解くと次のような値が得られる

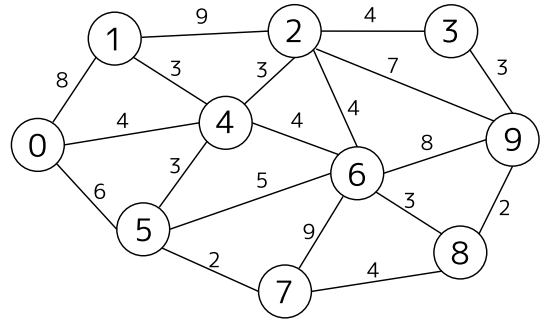


図 1 最短経路問題

$$\begin{cases} Q_{01}^{99} = 0.003378, Q_{04}^{99} = 0.719808, Q_{05}^{99} = 0.276814 \\ Q_{12}^{99} = 0.003140, Q_{14}^{99} = 0.000238 \\ Q_{23}^{99} = 0.120676, Q_{24}^{99} = -0.237229, Q_{29}^{99} = 0.119693 \\ Q_{39}^{99} = 0.120676 \\ Q_{45}^{99} = 0.001184, Q_{46}^{99} = 0.481633 \\ Q_{56}^{99} = 0.004722, Q_{57}^{99} = 0.273276 \\ Q_{67}^{99} = -0.000010, Q_{68}^{99} = 0.455848, Q_{69}^{99} = 0.030517 \\ Q_{78}^{99} = 0.273266 \\ Q_{89}^{99} = 0.729114 \end{cases}$$

この時の Q_{ij}^{99} が相対的に大きければ大きいほど粘菌が N_i, N_j 間を最短経路とみなして移動するということである. つまりこの最短経路問題は, $0 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ が最短経路であると言える.

6 プログラムの正確性

オイラー法を用いたプログラムではノード数が少なければ最短経路が出る. しかし, ノード数を増やし, 乱数で伝導率や距離を与えると明確に最短経路が求められない. そこで伝導率の更新をパラメーター γ に注目をして, 指数オイラー法を用いることで, 計算の高速化をはかる.

7 プログラムの改良

7.1 指数オイラー法

プログラムの改良に当たって指数オイラー法を用いる. (5) 式から $\alpha |Q_{ij}| = g(t), D_{ij} = D(t)$ と置く.

$$\frac{dD}{dt} = g(t) - \gamma D(t) \quad (10)$$

このとき $D(t) = C(t)e^{-\gamma t}$ と式をおいた際, $D(t)$ を微分すると $D'(t) = C'(t)e^{-\gamma t} - \gamma C(t)e^{-\gamma t}$ この時, $C'(t) = g(t)e^{\gamma t}$ ならば (10) 式を満たす. ここから

$$C(t_{n+1}) = C(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s)e^{\gamma s} ds \quad (11)$$

となる.

$$D(t_{n+1}) = D(t_n)e^{-\gamma \delta t} + e^{-\gamma t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s)e^{\gamma s} ds \quad (12)$$

ここで被積分関数の $g(s)$ を定数関数 $g(s) \equiv g(t_n)$ で近似する. また,

$$e^{-\gamma t_{n+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\gamma s} ds = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma \delta t}) \quad (13)$$

であるため, (12) 式に入れて, 近似値で置き換え, 元の値に戻すと

$$D^{n+1} = D^n e^{-\gamma \delta t} + \frac{\alpha |Q_{ij}|}{\gamma} (1 - e^{-\gamma \delta t}) \quad (14)$$

という式が得られる. プログラムへの実装はオイラー法で行った (9) 式の代わりに, (14) 式を用いることでオイラー法から指数オイラー法への変更としている.

7.2 指数オイラー法のメリット

伝道率の更新を行う際に $\gamma = 1.0$ というパラメータを用いた. この時 γ の値は不要なノード間のパスが消えるスピードとなる. このパラメータの値を大きくすればするほど早く計算ができる. しかし, オイラー法を用いたプログラムでは, ある一定の γ の数値以上の値をとってしまうと D の値に負が出てしまい発散してしまう. 指数オイラー法を用いることで, γ の値をどれだけ大きくとっても D の値が常に正であることが (14) 式から分かる. つまり, オイラー法から指数オイラー法へとプログラムを改良するメリットは以下の通りであると考えられる.

(1) D_{ij} の正值性が保たれる.

(2) 不要なノード間のパスを早く消すことができる.

この2点のメリットを実証するためにオイラー法と指数オイラー法との比較を行っていく.

8 オイラー法と指数オイラー法の比較

8.1 安定性の比較

オイラー法を用いた際 $\gamma = 16.0$ より大きな値をとると, D_{ij} の値に負の値が出てしまい, 発散してしまう. ここからは, $\gamma = 16.0$ の時のオイラー法, $\gamma = 17.0$ の時のオイラー法の, $\gamma = 17.0$ の時の指数オイラー法の3種類のパターンで図1と同じ例題を解き比較を行っていく. 最初はオイラー法を用いて $\gamma = 16.0$ の時の実験結果である.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01}^{99} = 0.000000, Q_{04}^{99} = 0.999999, Q_{05}^{99} = 0.000000 \\ Q_{12}^{99} = 0.000000, Q_{14}^{99} = 0.000000 \\ Q_{23}^{99} = 0.000001, Q_{24}^{99} = -0.000001, Q_{29}^{99} = 0.000001 \\ Q_{39}^{99} = 0.000001 \\ Q_{45}^{99} = 0.000000, Q_{46}^{99} = 0.999998 \\ Q_{56}^{99} = 0.000000, Q_{57}^{99} = 0.000000 \\ Q_{67}^{99} = 0.000000, Q_{68}^{99} = 0.062500, Q_{69}^{99} = 0.000000 \\ Q_{78}^{99} = 0.000001 \\ Q_{89}^{99} = 0.999999 \end{array} \right.$$

このように, γ の値を大きくすることでノード間のパスが消えていることが分かる. さらに, 最短経路の部分の Q の値が大きくなりどのノードを通ると最短経路かがわかりやすくなる. また, D の値も Q と同様にパスがないところ

は0になっている. 次に $\gamma = 17.0$ の値をとったときのオイラー法での結果である.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01}^{99} = 0.752739, Q_{04}^{99} = 0.247261, Q_{05}^{99} = 0.000000 \\ Q_{12}^{99} = -0.001698, Q_{14}^{99} = 0.754437 \\ Q_{23}^{99} = 0.008557, Q_{24}^{99} = -0.027252, Q_{29}^{99} = 0.016997 \\ Q_{39}^{99} = 0.008557 \\ Q_{45}^{99} = -0.025754, Q_{46}^{99} = 1.000200 \\ Q_{56}^{99} = -0.008085, Q_{57}^{99} = -0.017669 \\ Q_{67}^{99} = 0.108650, Q_{68}^{99} = 0.883465, Q_{69}^{99} = 0.000000 \\ Q_{78}^{99} = 0.090981 \\ Q_{89}^{99} = 0.974446 \end{array} \right.$$

また, $\gamma = 16.0$ の時と違い D の値が一定でなくなり, 以下の通りになる.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{01}^{99} = -0.072053, D_{04}^{99} = -0.008620, D_{05}^{99} = 0.000000 \\ D_{12}^{99} = -0.000115, D_{14}^{99} = -0.072624 \\ D_{23}^{99} = 0.000284, D_{24}^{99} = 0.000498, D_{29}^{99} = 0.000563 \\ D_{39}^{99} = 0.008085 \\ D_{45}^{99} = -0.000540, D_{46}^{99} = 0.013839 \\ D_{56}^{99} = -0.000277, D_{57}^{99} = -0.000295 \\ D_{67}^{99} = -0.037545, D_{68}^{99} = 0.050403, D_{69}^{99} = 0.000000 \\ D_{78}^{99} = 0.004628 \\ D_{89}^{99} = 0.057850 \end{array} \right.$$

これより $\gamma = 16.0$ を越えると実験結果と最短経路の解が合わなくなり, 安定性にかけているということが分かる. 次にオイラー法で解が出なくなったパラメータ $\gamma = 17.0$ と同じ値をとり, 指数オイラー法のプログラムで解を求めると

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{01}^{99} = 0.000000, Q_{04}^{99} = 0.998876, Q_{05}^{99} = 0.001124 \\ Q_{12}^{99} = 0.000000, Q_{14}^{99} = 0.000000 \\ Q_{23}^{99} = 0.000132, Q_{24}^{99} = -0.000263, Q_{29}^{99} = 0.000131 \\ Q_{39}^{99} = 0.000132 \\ Q_{45}^{99} = 0.000000, Q_{46}^{99} = 0.998613 \\ Q_{56}^{99} = 0.000000, Q_{57}^{99} = 0.001124 \\ Q_{67}^{99} = -0.000000, Q_{68}^{99} = 0.998613, Q_{69}^{99} = 0.000000 \\ Q_{78}^{99} = 0.001124 \\ Q_{89}^{99} = 0.999737 \end{array} \right.$$

オイラー法との比較や正值性が保たれているかの確認のために伝導率 D_{ij} も示す.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{01}^{99} = 0.000000, D_{04}^{99} = 0.058751, D_{05}^{99} = 0.000072 \\ D_{12}^{99} = 0.000000, D_{14}^{99} = 0.000000 \\ D_{23}^{99} = 0.000009, D_{24}^{99} = 0.000017, D_{29}^{99} = 0.000009 \\ D_{39}^{99} = 0.000009 \\ D_{45}^{99} = 0.000000, D_{46}^{99} = 0.058734 \\ D_{56}^{99} = 0.000000, D_{57}^{99} = 0.000072 \\ D_{67}^{99} = 0.000000, D_{68}^{99} = 0.058734, D_{69}^{99} = 0.000000 \\ D_{78}^{99} = 0.000072 \\ D_{89}^{99} = 0.058806 \end{array} \right.$$

$\gamma = 17.0$ の時のオイラー法と指数オイラー法の実験結果の値を比較すると D の値 Q の値共に指数オイラー法の

方がより良い値をとっていることが分かる。指数オイラー法の時の D_{ij} の値に負の数が出ずに正值性が保たれていることがわかり、安定性があるといえる。

8.2 死滅のスピードの比較

次に、死滅のスピードの比較を行う。図2はオイラー法で計算可能な値 $\gamma = 1.0$ と $\gamma = 16.0$ を比較した際、伝導率 D_{56} に注目しその減少のスピードをグラフ化したものである。x軸は繰り返しの回数 t の値をとり、y軸にはその時の D_{56} の値をとっている。オイラー法を用いた計

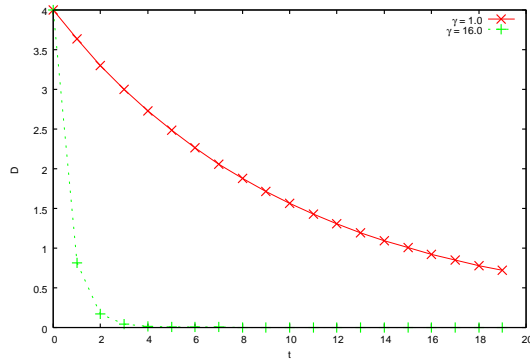


図2 $\gamma = 1.0$ と $\gamma = 16.0$

算だけでも、ノード間のパスの死滅の早さは目に見えて分かる。図3ではオイラー法で計算可能な $\gamma = 16.0$ と計算不可能な $\gamma = 17.0$ のパラメーターをとった時のグラフを示している。図2でも D_{56} を選択したが、理由としては $\gamma = 16.0, \gamma = 17.0$ どちらの値をとっても手順を100回繰り返せば0へとなる点からである。図3より、どちらも約

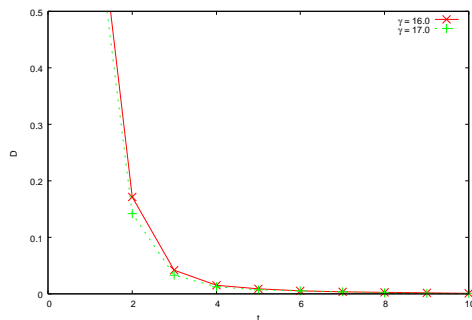


図3 $\gamma = 16.0$ と $\gamma = 17.0$

8回目の繰り返してパスの削除がされている。回数はどちらも大差が無いように見えるが、 γ の値を1変えるだけで、死滅のスピードが微量であるが早くなっていることが分かる。さらにオイラー法で計算可能な範囲 $\gamma = 16.0$ と、指数オイラー法で計算可能な値をわかりやすく比較したものが、図4のグラフである。 $\gamma = 100.0$ まで数値を上げることで、プログラムの手順を1度繰り返しただけで、伝導率が0へと急激に近づいている。図3ではオイラー法と指数オイラー法の違いが微量であったが、指数オイラー法はここまで、さらにはこれ以上のスピードを出すことができる。

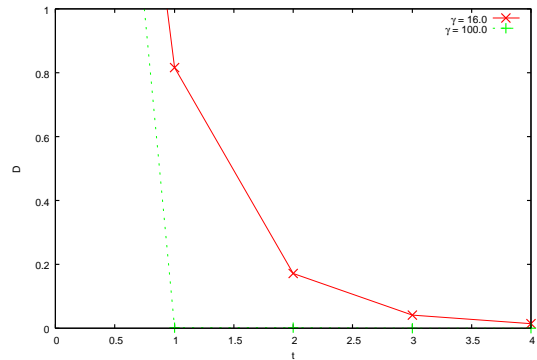


図4 $\gamma = 16.0$ と $\gamma = 100.0$

9 おわりに

我々が目にするであろうカーナビ、最短経路のルートを見つけられるだけではなく、「事故による情報の更新といった条件」も粘菌を使った最短経路問題の解法はクリアできる。さらに、光や、化学物質を避けるといった性質を利用すれば鉄道の線路を効率よく敷くための最短経路を導き出せる。日本地図状の山や川など線路を敷けない地形に光や化学物質を配置し、駅をおきたい場所に餌を並べておけば粘菌が効率の良い線路の敷き方を示してくれるといった具合である。ただし、実地での調査を行わなければ山道など急激なカーブや劣悪な地面の状況などが分からないため、大きな事故を引き起こす可能性があるという欠点もある。また、この数学モデルからオイラー法を学びプログラムを組み実験を行うことで、プログラムを用いて最短経路問題を解くことができるということが分かり粘菌アルゴリズムに対して理解が深まった。それだけではなく、実験結果を出す早さや安定性を追求するために、指数オイラー法を学び先に組んだプログラムを改良することで、より安定性のあるプログラムにすることができた。今後の課題としてはダイクストラ法での解き方をプログラムに組み込み、その結果を一致するか自動で判別するプログラムを組むことがあげられる。また、最短経路が2パターン得られる問題と直面した際、どのような基準で経路が決定されるか調べるのが課題である。

参考文献

- [1] 中垣俊之.『粘菌 その驚くべき知性』,株式会社 PHP 研究所,2010.
- [2] A. Tero,R. Kobayashi,T. Nakagaki, "Physarum solver: A biologically inspired method of road- network navigationb" Phisiva A 363 (2006), 115-119.
- [3] M. Hochbruck, A. Ostermann, Exponential integrators, Acta Numerica 19 (2010), 209-286
- [4] 築地克弥, 松田千夏, 高橋和成.『忌避化学物質を利用した粘菌変形体のネットワーク形成』. <http://www.ous.ac.jp/garden/kenkyuhoukoku/16/Naturalistae16-39-45.pdf>