

2 乗和多項式に基づく セミアクティブサスペンションの非線形制御

M2015SC010 松岡浩司

指導教員：大石泰章

1 はじめに

自動車のセミアクティブサスペンションは、バネ上(車体)を支えて衝撃を吸収するバネとバネの振動を減衰する減衰力可変式ショックアブソーバから構成され、減衰力可変式ショックアブソーバの減衰係数を調整することによりバネ上(車体)の振動を抑制する。しかし、セミアクティブサスペンションは平衡点で入力働かない双線形システムとなるため、制御することは難しい。双線形性を考慮しない制御系の設計法の1つとして、プラントをアクティブサスペンションと仮定して線形制御理論を適用する方法があるが、乗員に制御の違和感を与えてしまう。一方、双線形性を考慮する制御系の設計法の1つとして、パラメータ依存線形行列不等式(PDLMI)を制約条件にもつロバスト半正定値計画問題(SDP)を解く方法がある。ロバストSDPの解法の1つとして、PDLMIを有限個の線形行列不等式(LMI)へ帰着する方法[1]が広く知られているが、この場合のPDLMIはパラメータに関して2次以上であるため、保守性が高くなってしまふ。近年、ロバストSDPの保守性の低い解法の1つとして、2乗和多項式[2][3]に基づく手法が研究されている。

本論文の構成は以下のとおりである。2章では、セミアクティブサスペンションの説明をする。3章では、擬似線形表現[4]を導出する。また、コスト保証制御問題[5]をPDLMIを制約条件にもつロバストSDPへ帰着させ、2乗和多項式に基づきこのロバストSDPの近似解を求める。4章では、制御系の設計結果を示す。5章では、数値シミュレーションにより適用した方法の有用性を示す。6章では、本論文のまとめと今後の課題を述べる。

2 制御対象

本論文で扱うセミアクティブサスペンションを図1に示す。また、各パラメータは文献[6]に従うものとする(表1)。図1より、車両のバネ上(車体) M_b とバネ下(車輪) M_w の間にバネ K_s と減衰力可変式ショックアブソーバ $C_s + C_v$ からなるサスペンションが接続されている。また、路面変位 x_r はタイヤ K_t を通してバネ下(車輪) M_w に作用している。このモデルの運動方程式は、

$$M_b \ddot{x}_b = C_s(\dot{x}_w - \dot{x}_b) + C_v(\dot{x}_w - \dot{x}_b) + K_s(x_w - x_b), \quad (1)$$

$$M_w \ddot{x}_w = -C_s(\dot{x}_w - \dot{x}_b) - C_v(\dot{x}_w - \dot{x}_b) - K_s(x_w - x_b) + K_t(x_r - x_w) \quad (2)$$

である。ここで、制御入力は可変減衰係数 C_v であり、状態変数の1つであるストローク速度 $\dot{x}_w - \dot{x}_b$ と掛け算されている。そのため、 $\dot{x}_w - \dot{x}_b = 0$ のときに入力働かない双線形システムとなることが分かる。

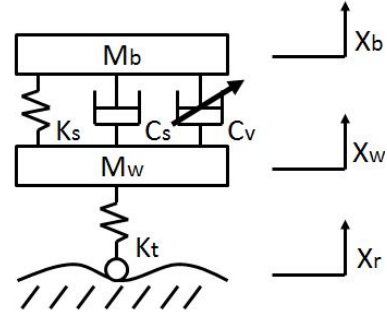


図1 セミアクティブサスペンション

表1 パラメータ

記号	詳細	値
M_b	バネ上(車体)質量	375[kg]
M_w	バネ下(車輪)質量	38[kg]
K_s	サスペンションのバネ定数	21560[N/m]
K_t	タイヤのバネ定数	240000[N/m]
C_s	線形減衰係数	2000[Ns/m]
C_v	可変減衰係数	-500~500[Ns/m]
x_b	バネ上(車体)変位	[m]
x_w	バネ下(車輪)変位	[m]
x_r	路面変位	[m]

3 制御系の設計

3.1 擬似線形表現の導出

運動方程式(1)式と(2)式に対して、状態変数を $x(t) = [x_r - x_w \ x_w - x_b \ \dot{x}_w \ \dot{x}_b]^T$ 、外乱入力を $w(t) = \dot{x}_r$ 、制御入力を $u(t) = C_v$ 、ストローク速度 $\dot{x}_w - \dot{x}_b$ を θ と書くと、このシステムの擬似線形表現は以下のように求まる:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2(\theta)u(t), \\ y(t) = Cx(t) + D(\theta)u(t). \end{cases} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2(\theta) \end{bmatrix} \\ & = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{K_t}{M_w} & -\frac{K_s}{M_w} & -\frac{C_s}{M_w} & \frac{C_s}{M_w} & 0 & -\frac{\theta}{M_w} \\ 0 & \frac{K_s}{M_b} & \frac{C_s}{M_b} & -\frac{C_s}{M_b} & 0 & \frac{\theta}{M_b} \end{array} \right], \\ & \begin{bmatrix} C & D(\theta) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \frac{K_s}{M_b} & \frac{C_s}{M_b} & -\frac{C_s}{M_b} & \frac{\theta}{M_b} \end{array} \right] \end{aligned}$$

であり、 $B_2(\theta)$ と $D(\theta)$ は θ に関して1次式である。また、 θ は $-0.5 \leq \theta \leq 0.5$ 、 θ の速度 $\dot{\theta}$ は $-70 \leq \dot{\theta} \leq 70$ と仮定し、有界閉集合

$$\Theta = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 \mid -0.5 \leq \theta \leq 0.5, -70 \leq \dot{\theta} \leq 70\} \quad (4)$$

を定める。

3.2 ロバスト半正定値計画問題

擬似線形表現 (3) 式に対して、コスト保証制御問題の有解条件

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \leq \gamma x_0^T x_0 \quad (5)$$

を達成する、状態フィードバック形式のコントローラ

$$u(t) = K(\theta)x(t) \quad (6)$$

を設計する問題を考える。ここで、 $Q = Q^T = Q_h^T Q_h \succ O$, $R = R^T \succ O$, $\gamma > 0$ であり、 $\succ (\succeq)$ は対称行列が正定値 (半正定値) であることを表す。この問題の可解条件は、PDLMI を制約条件にもつ以下のロバスト SDP を満足する決定変数 $X(\theta) = X(\theta)^T \succeq O$, $F(\theta)$, γ が存在することである：

最小化 γ

条件

$$M_1(\xi, \theta) := X(\theta) \succeq O,$$

$$M_2(\xi, \theta, \dot{\theta}) := \begin{bmatrix} -(\Phi(\theta) + \Phi(\theta)^T - \dot{X}(\theta)) & * & * \\ Q_h X(\theta) & I & * \\ RF(\theta) & 0 & R \end{bmatrix} \succeq O,$$

$$M_3(\xi, \theta) := \begin{bmatrix} \gamma I & * \\ I & X(\theta) \end{bmatrix} \succeq O$$

$$(\forall (\theta, \dot{\theta}) \in \Theta). \quad (7)$$

ここで、 $X(\theta)$ は θ の 1 次関数 $X_0 + \theta X_1$, $\dot{X}(\theta)$ は $\dot{\theta} X_1$, $F(\theta)$ は θ の 1 次関数 $F_0 + \theta F_1$, ξ は決定変数 $\xi = (X_0, X_1, F_0, F_1, \gamma)$, $\Phi(\theta)$ は $\Phi(\theta) = AX(\theta) + B_2(\theta)F(\theta)$ であり、* は行列全体が対称になるように補完する。このとき、有解条件 (5) 式を達成するコントローラ (6) 式のゲインは

$$\begin{aligned} K(\theta) &= F(\theta)X(\theta)^{-1} \\ &= (F_0 + \theta F_1)(X_0 + \theta X_1)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

によって与えられる。

ロバスト SDP(7) 式を解くには、PDLMI 制約条件がすべての $(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta$ に対して満たされる必要があり、無限本の LMI を解かなければならないため、そのまま解くことは難しい。そこで、2 乗和多項式に基づきロバスト SDP(7) 式を満たす近似解を求めることを考える。

3.3 2 乗和多項式

多項式行列 $S(\theta)$ がある多項式行列 $T(\theta)$ を用いて

$$S(\theta) = T(\theta)^T T(\theta) \quad (9)$$

と表すことができるとき、 $S(\theta)$ を 2 乗和多項式という。このとき、 $S(\theta)$ は対称行列、 $S(\theta)$ の次数は偶数であり $S(\theta)$ が $2d$ 次ならば $T(\theta)$ は d 次、任意の θ に対して $S(\theta) \succeq O$ であるという性質をもつ。

3.4 2 乗和多項式に基づく近似解法

領域 Θ が $(\theta, \dot{\theta})$ の多項式不等式で規定される有界閉集合である場合、2 乗和多項式に基づきロバスト SDP(7) 式を満たす近似解を求めることができる。準備として、有界閉集合 (4) 式を多項式 $r_1(\theta) = (\theta + 0.5)(0.5 - \theta)$, $r_2(\dot{\theta}) = (\dot{\theta} + 70)(70 - \dot{\theta})$ により、

$$\Theta = \{(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 | r_1(\theta) \geq 0, r_2(\dot{\theta}) \geq 0\} \quad (10)$$

と書く。このとき、ロバスト SDP(7) 式の PDLMI 制約条件の十分条件として、

以下を満たす多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\dot{\theta})$, $S_4(\theta)$ が存在する：

$M_1(\xi, \theta) - r_1(\theta)S_1(\theta)$ は 2 乗和多項式、

$M_2(\xi, \theta, \dot{\theta}) - r_1(\theta)S_2(\theta) - r_2(\dot{\theta})S_3(\dot{\theta})$ は 2 乗和多項式、

$M_3(\xi, \theta) - r_1(\theta)S_4(\theta)$ は 2 乗和多項式、

$S_1(\theta)$ は 2 乗和多項式、

$S_2(\theta)$ は 2 乗和多項式、

$S_3(\dot{\theta})$ は 2 乗和多項式、

$S_4(\theta)$ は 2 乗和多項式

$$(11)$$

を考えることができる。実際、任意の $(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta$ に対して十分条件 (11) 式の行列はすべて半正定である。また、有界閉集合 (10) 式から $r_1(\theta) \geq 0$, $r_2(\dot{\theta}) \geq 0$ であり、2 乗和多項式の性質 (9) 式から $S_1(\theta) \succeq O$, $S_2(\theta) \succeq O$, $S_3(\dot{\theta}) \succeq O$, $S_4(\theta) \succeq O$ であるため、 $r_1(\theta)S_1(\theta) \succeq O$, $r_1(\theta)S_2(\theta) + r_2(\dot{\theta})S_3(\dot{\theta}) \succeq O$, $r_1(\theta)S_4(\theta) \succeq O$ が成り立つ。さらに、 $M_1(\xi, \theta) - r_1(\theta)S_1(\theta) \succeq O$, $M_2(\xi, \theta, \dot{\theta}) - r_1(\theta)S_2(\theta) - r_2(\dot{\theta})S_3(\dot{\theta}) \succeq O$, $M_3(\xi, \theta) - r_1(\theta)S_4(\theta) \succeq O$ であるため、 $M_1(\xi, \theta) \succeq O$, $M_2(\xi, \theta, \dot{\theta}) \succeq O$, $M_3(\xi, \theta) \succeq O$ となる。したがって、十分条件 (11) 式をロバスト SDP(7) 式の PDLMI 制約条件と置き換えることにより、もとの問題の近似問題を作ることができる。この近似問題の実行可能解は必ずもとの問題の実行可能解になる。また、多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\dot{\theta})$, $S_4(\theta)$ の次数を高くすることにより、十分条件 (11) 式は必要条件に近づき、近似の精度が高まる。しかし、2 乗和多項式に基づく手法は、 θ の次元が高い場合や多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\dot{\theta})$, $S_4(\theta)$ の次数が高い場合、最終的に解くべき問題の計算量が指数関数的に大きくなってしまふ。

3.5 他の方法による制御系の設計

2 乗和多項式に基づく制御の性能と比較するため、以下の 2 つの方法による制御系の設計をする。

1 つ目の方法では、制御入力を力入力 $u_\ell = C_v(\dot{x}_w - \dot{x}_b)$ と仮定して状態空間表現を導出する。ここで、この状態空間表現は、アクティブサスペンション (サスペンション外部の動力源から減衰力に相当する制御力を付加することによりバネ上 (車体) の振動を抑制する方法) を状態空間表現したものと等しい。この状態空間表現に対して、有解条件 (5) 式を達成するコントローラのゲイン (8) 式を求める。そして、実際の入力では C_v を $C_v = \frac{u_\ell}{\dot{x}_w - \dot{x}_b}$ によつ

て決定する。この方法を以下、線形制御を適用した場合と呼ぶ。2つ目の方法では、パラメータを θ とした線形パラメータ変動 (LPV) モデルを導出する。文献 [1] に従い、この LPV モデルに対して、ロバスト SDP(7) 式の実行可能解を求めることを考える。ロバスト SDP(7) 式の PDLMI 制約条件 $M_1(\xi, \theta)$, $M_2(\xi, \theta, \dot{\theta})$, $M_3(\xi, \theta)$ はそれぞれ、 θ , $\dot{\theta}$, θ に関して 1 次であり、さらに、 $M_2(\xi, \theta, \dot{\theta})$ は θ に関して 2 次であるため、 θ^2 を他とは独立なパラメータと見なし、 θ , $\dot{\theta}$ の端点条件で置き換えることにより、有限個の LMI 制約条件へ帰着することができる。このように、ロバスト SDP(7) 式の PDLMI 制約条件を有限個の LMI 制約条件へ置き換えることにより、有解条件 (5) 式を達成するコントローラのゲイン (8) 式を求める。この方法を以下、従来法に基づく制御を適用した場合と呼ぶ。

4 設計結果

2 乗和多項式に基づきロバスト SDP(7) 式を満たす近似解を求める場合、解くべき問題の計算量が大きくなってしまったため、使用する計算機の性能により扱える問題の大きさに限界がある。本論文では、CPU として Intel Core i5 M560(2.67GHz)、メモリとして 3GB を搭載する計算機上で、数値解析ソフトウェアとして MATLAB(Version R2013a)、LMI パーサとして YALMIP(Version 19-Sep-2015)、SDP ソルバとして SeDuMi(Version 1.3.2) と SDPT3(Version 4.0) を使用した。

各制御方法において、 Q を単位行列、 R を 1 とし、SeDuMi と SDPT3 それぞれで数値解を求めた。

線形制御を適用した場合には、SeDuMi と SDPT3 それぞれで $\gamma = 66.1106$ が得られた。従来法に基づく制御を適用した場合の計算結果を表 2 に示す。ここで、 $X(\theta)$ や $F(\theta)$ が定数行列 ($X_1 = O$, $F_1 = O$) であるとき $X(\theta)$ の次数は 0、 $X(\theta)$ や $F(\theta)$ が θ の 1 次関数 ($X_1 \neq O$, $F_1 \neq O$) であるとき $X(\theta)$ の次数は 1 である。表 2 より、 $X(\theta)$ の次数や $F(\theta)$ の次数に関わらず、SeDuMi と SDPT3 それぞれで $\gamma = 66.1106$ が得られた。よって、これら 2 つの制御方法では、SeDuMi と SDPT3 それぞれの数値解の信頼性は同等であることが分かる。

2 乗和多項式に基づく制御を適用した場合の計算結果を表 3 に示す。ここで、多項式行列 $S_3(\dot{\theta})$ は $\dot{\theta}$ に関する 2 乗和多項式であり、 $X(\theta)$ の次数が 0 であるとき多項式行列 $S_3(\dot{\theta})$ は存在しないため、「—」と表記する。また、本論文で使用した計算機の性能では、表 3 で扱った問題よりも計算量の大きい問題の数値解を求めることはできなかった。表 3 に見るように、SeDuMi と SDPT3 で異なる γ の値が得られた。SeDuMi を使用して解いた計算結果では、多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\dot{\theta})$, $S_4(\theta)$ の次数を高くしたとき、 γ の値が増加する結果 (赤字部分) が得られた。これは 3.4 節で記した理論に反する結果である。一方、SDPT3 を使用して解いた計算結果では、多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\dot{\theta})$, $S_4(\theta)$ の次数を高くしたとき、3.4 節で記した理論の通りに γ の値が減少する結果が得られた。よって、この制御方法では、SDPT3 の数値解の信頼性が高いことが分かる。5 章の数値シミュレーションでは、SDPT3 を使用して得たコントローラ (6) 式を使用する。

表 2 従来法に基づく制御を適用した場合

deg X	deg F	SeDuMi		SDPT3	
		γ	time[s]	γ	time[s]
0	1	66.1106	0.644	66.1106	0.384
1	0	66.1106	0.640	66.1106	0.374
1	1	66.1106	0.682	66.1106	0.564

表 3 2 乗和多項式に基づく制御を適用した場合

(a) $X(\theta)$ の次数が 0、 $F(\theta)$ の次数が 1 のとき

deg $S_1, \text{deg}S_2, \text{deg}S_4$	deg S_3	SeDuMi		SDPT3	
		γ	time[s]	γ	time[s]
2	—	66.0839	10.983	66.1106	7.786
4	—	66.1031	58.797	66.1106	40.749
6	—	66.0776	154.378	66.1106	48.252
8	—	66.1056	348.459	66.1106	88.046

(b) $X(\theta)$ の次数が 1、 $F(\theta)$ の次数が 0 のとき

deg $S_1, \text{deg}S_2, \text{deg}S_4$	deg S_3	SeDuMi		SDPT3	
		γ	time[s]	γ	time[s]
2	2	12.6688	32.900	60.1324	21.372
4	4	13.3362	159.833	58.8213	114.504

(c) $X(\theta)$ の次数が 1、 $F(\theta)$ の次数が 1 のとき

deg $S_1, \text{deg}S_2, \text{deg}S_4$	deg S_3	SeDuMi		SDPT3	
		γ	time[s]	γ	time[s]
2	2	11.8799	30.561	59.5800	20.343
4	4	13.3220	159.291	58.9789	112.712

5 数値シミュレーション

5.1 数値シミュレーションの設定

一般路では、ストローク変位 0.005m 以下、ストローク速度 0.01m/s ~ 0.5m/s の領域が多用される。また、乗員は 0.5Hz から振動を感じ、特に、10Hz ~ 30Hz を不快に感じる。そのため、自動車の乗り心地を評価するときこれらの範囲が問題視される。よって、本論文では、これらの範囲の制振性能を保証することを考え、路面変位 x_r にチャープ信号 (振幅 0.005m、時間に比例して周波数が 0.5Hz から 30Hz へ変化する正弦波) を加え、数値シミュレーションをし、4 章の各制御方法を評価する。ここで、各制御方法において、制御入力 of の大きさを調整するため、 Q と R は試行錯誤により決定した。また、従来法に基づく制御を適用した場合と 2 乗和多項式に基づく制御を適用した場合の設計仕様を同等とするため、 $X(\theta)$ の次数を 0、 $F(\theta)$ の次数を 1、多項式行列 $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_4(\theta)$ の次数を 2、多項式行列 $S_3(\dot{\theta})$ の次数を 0 とした。

可変減衰係数 C_v を最小値 -500 に固定した場合 (ソフト固定) と最大値 500 に固定した場合 (ハード固定) において、縦軸を要求減衰力 $N (= \theta(C_s + C_v))$ 、横軸をストローク速度 θ として、両者の関係を描いたものを図 2 に示す。図 2 の赤線は減衰係数 C_v を調整することにより減衰力可変式ショックアブソーバが減衰力を発生できる限界であり、コントローラ (6) 式から生じる要求減衰力は赤線で打ち切られて赤線の内側の領域で実現される。

5.2 数値シミュレーションの結果と考察

線形制御を適用した場合の状態の時間変化を、縦軸を要求減衰力 N 、横軸をストローク速度 θ として、描いたものを図3に示す。図3より、線形制御を適用した場合には、コントローラ(6)式から生じる要求減衰力が赤線の外側の領域にも存在していることが分かる。赤線の外側の領域にある要求減衰力は減衰力可変式ショックアブソーバがそのままの状態では実現することができないため、赤線で打ち切る。このとき、減衰力の不連続な切替が発生するため、乗員に制御の違和感を与えてしまう。

従来法に基づく制御を適用した場合と2乗和多項式に基づく制御を適用した場合の状態の時間変化を、縦軸を要求減衰力 N 、横軸をストローク速度 θ として、描いたものを図4と図5に示す。また、縦軸をバネ上(車体)変位 x_b 、ストローク速度 θ 、可変減衰係数 C_v 、横軸を時間として、それらの時間変化を描いたものを図6~図11に示す。図4と図5より、これらの2つの制御方法では、コントローラ(6)式から生じる要求減衰力が赤線の内側の領域に制限できていることが分かる。よって、減衰力可変式ショックアブソーバが要求減衰力をそのままの状態では実現することができるため、減衰力の不連続な切替が発生しない。図10と図11より、2乗和多項式に基づく制御を適用した場合には、従来法に基づく制御を適用した場合と比べ、可変減衰係数 C_v を調整できる範囲を広く使うことができている。この意味で2乗和多項式に基づく手法は減衰力可変式ショックアブソーバの性能を十分に引き出しているといえる。

6 おわりに

本論文では、双線形システムとなるセミアクティブサスペンションを扱い、2乗和多項式に基づく手法を適用した。4章では、SDPT3の数値解の信頼性が高いことを示した。また、他の方法に比べ γ の値が減少することを示した。5章では、セミアクティブサスペンションへの有用性を示した。今後の課題は、状態や入力の変換を考慮した制御系の設計をすることである。

参考文献

- [1] R.Watanabe, K.Uchida and M.Fujita: A New LMI Approach to Analysis of Linear Systems with Scheduling Parameter - Reduction to Finite Number of LMI Conditions-, Proceedings of the 35th IEEE CDC, 1663/1665 (1996)
- [2] 市原裕之: 二乗和に基づく制御系解析・設計, システム/制御/情報, Vol.55, No.5, 174/180 (2011)
- [3] 大石泰章: 2乗和多項式とその非線形制御への応用, システム/制御/情報, Vol.58, No.11, 449/455 (2014)
- [4] S.Prajna, A.Papachristodoulou and F.Wu: Nonlinear Control Synthesis by Sum of Squares Optimization: A Lyapunov-based Approach, Proceedings of the 5th Asian Control Conference, 157/165 (2004)
- [5] Y.Fujisaki and Y.Oishi: Guaranteed cost regulator design: A probabilistic solution and a randomized algorithm, Automatica, Vol.43, No.2, 317/324 (2007)
- [6] 三平, 大作, 上村: 非線形 H_∞ 制御理論の限界と可能性—セミアクティブサスペンションへの応用, システム/制御/情報, Vol.43, No.10, 544/552 (1999)

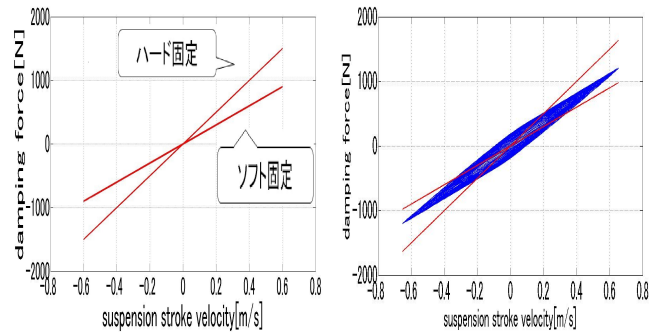


図2 N vs θ の限界

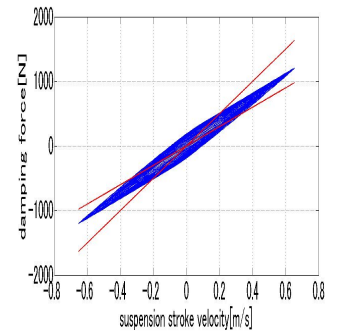


図3 線形制御: N vs θ

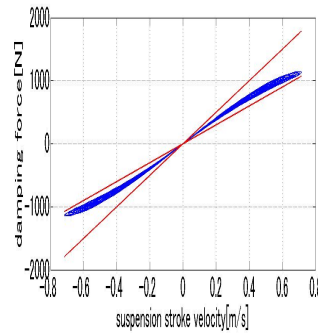


図4 従来法: N vs θ

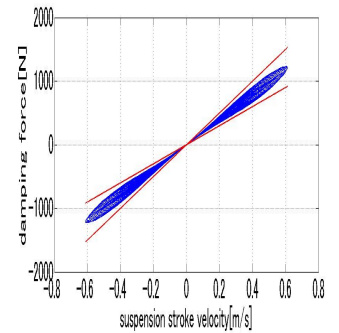


図5 2乗和多項式: N vs θ

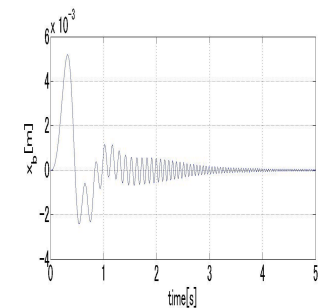


図6 従来法: x_b

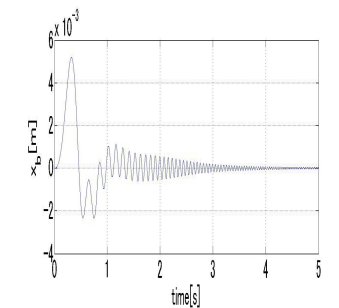


図7 2乗和多項式: x_b

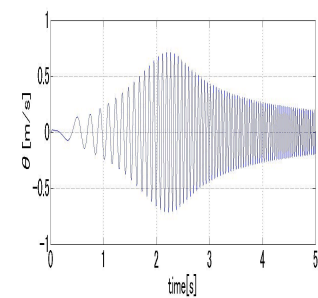


図8 従来法: θ

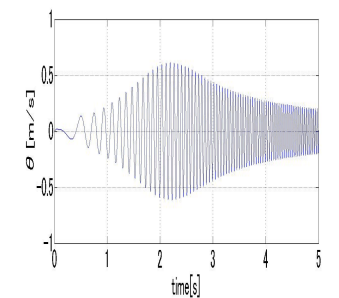


図9 2乗和多項式: θ

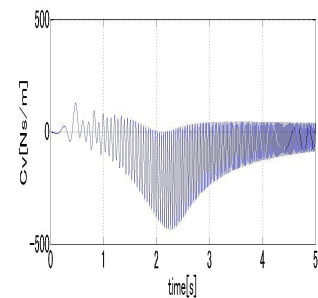


図10 従来法: C_v

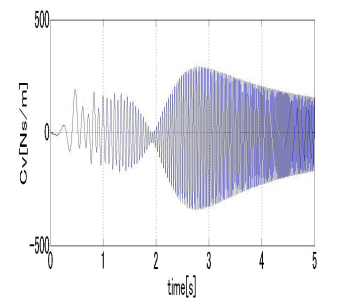


図11 2乗和多項式: C_v